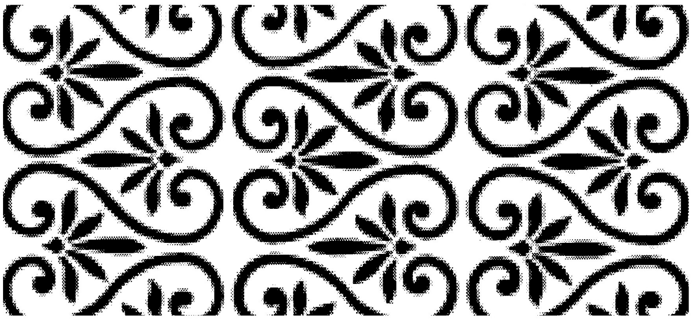
Übungsserie 5

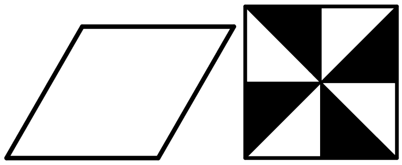
Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 14. Mai 2010** in der Vorlesung

1. Figur 1 zeigt ein **Bandornament** (**Fries**). Man muss sich die Figur nach links und nach rechts bis ins Unendliche fortgesetzt denken. Zählen Sie alle (von der Identität verschiedenen)
   (a) Translationen (zugehörige Vektoren formal angeben, kleinsten Vektor $\vec{v}$ einzeichnen)
   (b) Geradenspiegelungen (zugehörige Symmetrieachsen in den Ausschnitt einzeichnen)
   (c) Rotationen (zugehöriger Drehwinkel angeben und Drehzentren in den Ausschnitt eintragen)
   (d) Gleitspiegelungen (zugehörige Translationsvektoren und Spiegelungsgeraden formal angeben)

   auf, die das Bandornament mit sich selbst zur Deckung bringen, d.h. die Symmetrietransformationen des Bandornaments sind. Geben Sie in (b) bzw. (c) ferner an, wie gross der Abstand zweier benachbarter Symmetrieachsen bzw. Drehzentren ist, wenn v die Länge des kleinsten Vektors aus (a) bezeichnet.



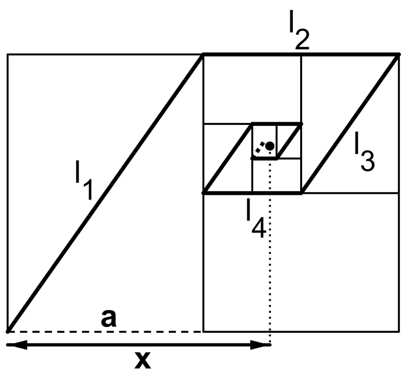
Figur 1 (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. Gegeben sind ein **Rhombus** (Raute) und ein quadratisches **Muster** (Figur 2).
   (a) Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein und ermitteln Sie für beide Figuren alle vier Kongruenztransformationen, welche die Figur mit sich selbst zur Deckung bringen.
   (b) Stellen Sie die zugehörigen **Verknüpfungstafeln** auf und nennen Sie einen strukturellen Unterschied.

3. Die **DIN-A Formate** entstehen auseinander durch fortgesetztes Halbieren und haben alle das Verhältnis *Länge* : *Breite* $= \sqrt{2} : 1$. Sie sind damit alle massstäbliche Verkleinerungen voneinander. Figur 3 zeigt eine Folge von solchen DIN-A Formaten: l_1 ist eine Diagonale in einem DIN-A1 Rechteck, l_2 die Länge in einem DIN-A2 Rechteck, l_3 wiederum eine Diagonale in einem DIN-A3 Rechteck usw. ad infinitum.
   (a) Berechnen Sie die Länge $L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots$ der „**Spirale**" (ausgedrückt durch a) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit". (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)
   (b) Bestimmen Sie die „Lage" des Zentrums, d.h. den Abstand x (ausgedrückt durch a).



Figur 3 (Aufgabe 3)

Übungsserie 5

4. „Wer A sagt muss auch B sagen“: Es sollen alle möglichen „Wörter“ bestehend nur aus den beiden Buchstaben A und B gebildet werden. Dabei ist als Spielregel zu beachten, dass auf ein A immer ein B folgen muss. (A darf somit auch nicht am Schluss eines „Wortes“ stehen.)

   (a) Schreiben Sie das einzige, mögliche Wort der Länge 1 auf. (Länge $\triangleq$ Anzahl Buchstaben) Schreiben Sie alle möglichen Wörter der Länge 2, der Länge 3, 4 und der Länge 5 auf. Wie viele sind es jeweils?

   (b) Geben Sie ein Gesetz an, wie die Anzahl a_n der Wörter der Länge n berechnet werden kann und begründen Sie es.

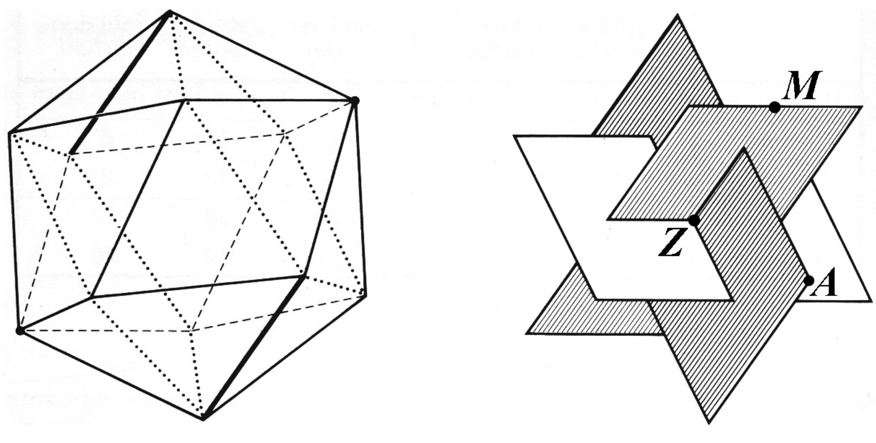
   (c) Die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ nähern sich für $n \to \infty$ immer mehr einem speziellen Wert an. Welchem?

5. **Abstrakte Gruppen**: Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen $\cdot$) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

$\mathbb{P}$	Menge der Primzahlen
$\mathbb{D}$	Menge der natürlichen Vielfachen von 3
$\$$	Menge der Quadratzahlen
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven, rationalen Zahlen (Die Menge aller Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen)

   Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das ‘erste’, nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen.

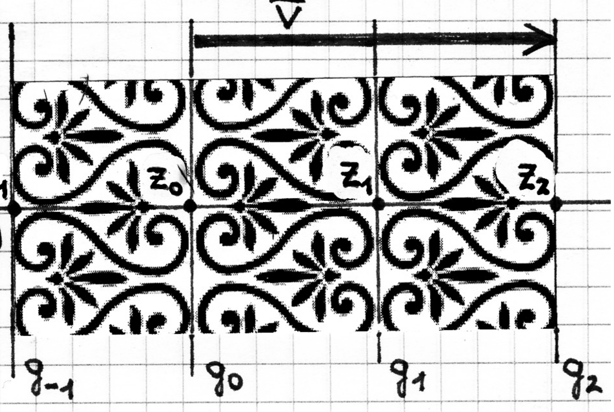
6. Die zwölf Ecken eines **regulären Ikosaeders** sind die zwölf Ecken dreier Goldener Rechtecke, die paarweise aufeinander senkrecht stehen (Figur 4). Berechnen Sie mithilfe dieses Resultats aus Aufgabe 2.5 (vgl. Skript zur Vorlesung) von einem regulären Ikosaeder mit der Kantenlänge a den exakten Ausdruck für
   (a) den Umkugelradius R (Tipp: $\phi^2 = \phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$, da $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)
   (b) den Inkugelradius r. (Tipp: Drücken Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ZAM auf zwei Arten aus und setzen Sie die beiden Ausdrücke gleich.)



Figur 4 (Aufgabe 6)

Übungsserie 5 FS 2010 Seite 1

1 Die horizontale <u>unendliche</u> Ausdehnung des Bandornaments hat zur Folge:



(a) als Translationsrichtung kommt nur die horizontale Richtung in Frage. Periodisches Muster ⇝ $T_{\vec{w}}$ mit $\vec{w} = n\vec{v}$ (ganzzahlige Vielfache von $\vec{v}$) d.h. $\ldots, -2\vec{v}, -\vec{v}, \vec{v}, 2\vec{v}, \ldots$

(b) als Symmetrieachsen kommen nur Mittelparallele ($\parallel \vec{v}$) oder vertikale ($\perp \vec{v}$) Geraden in Frage. Muster ⇝ S_h ; $\ldots, S_{g_{-1}}, S_{g_0}, S_{g_1}, \ldots$

Abstand benachbarter g_k, g_{k+1} : $\frac{v}{2}$

(c) als Drehwinkel kommt nur $180°$ in Frage, als Drehzentren nur Punkte auf Mittelparallele h

Muster ⇝ Halbdrehungen (Punktspiegelungen) $\ldots, R_{Z_{-1}}, R_{Z_0}, R_{Z_1}, \ldots$; $|Z_k Z_{k+1}| = \frac{v}{2}$

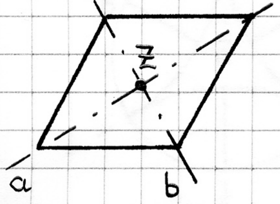
(d) Gleitspiegelungen $S_h \circ T_{\vec{w}}$ mit Translationsvektor $\vec{w} = n\vec{v}$ ($n \in \mathbb{Z}$) und Sp.gerade h

Gleitspiegelungen mit Spiegelungsachsen $\perp$ h lassen sich auf reine Geradenspieg. reduzieren

z.B. $S_{g_1} \circ T_{\vec{v}} = S_{g_0}$ (gleiche Zuordnung!)

---

2 (a) Rhomus: I; $R_{Z,180°}$; S_a; S_b | Muster: I; $R_{90°}$; $R_{180°}$; $R_{270°}$ (um Z) Mitte Muster!



(b)

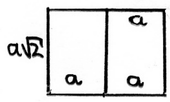
$\circ$	I	R	S_a	S_b
I	I	R	S_a	S_b
R	R	I	S_b	S_a
S_a	S_a	S_b	I	R
S_b	S_b	S_a	R	I

$\circ$	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
I	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	I
R_{180}	R_{180}	R_{270}	I	R_{90}
R_{270}	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}

In der Hauptdiagonale stets I, hier nicht (zyklisch!)

3

$l_1 = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$



$l_2 = a$

$l_3 = \frac{1}{2} l_1$, $l_4 = \frac{1}{2} l_2$

$l_5 = \frac{1}{2} l_3$, $l_6 = \frac{1}{2} l_4$

Jedes nachfolgende <u>Paar</u> ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden Paars mit $\lambda = \frac{1}{2}$

(a) $L = (l_1 + l_2) + (l_3 + l_4) + (l_5 + l_6) + \ldots$
$= (l_1 + l_2) + \frac{1}{2}(l_1 + l_2) + \frac{1}{2}(l_3 + l_4) + \ldots$

$L = \sqrt{3}a + a + \frac{1}{2}\underbrace{[l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots]}_{L} \quad \| -\frac{1}{2}L$

$\frac{1}{2}L = a(\sqrt{3} + 1)$

$\underline{\underline{L = 2a(\sqrt{3} + 1)}}$

(b) $x = 2l_2 - 2l_4 + 2l_6 - \ldots = 2a - [\underbrace{2l_4}_{\frac{1}{2}l_2} - \underbrace{2l_6}_{\frac{1}{2}l_4} + \ldots]$

$= 2a - \frac{1}{2}\underbrace{[2l_2 - 2l_4 + \ldots]}_{x} \quad \| + \frac{1}{2}x$

$\frac{3}{2}x = 2a$, $\underline{\underline{x = \frac{4}{3}a}}$

(4)

(a)

Wortlänge	Anz	Wort
1	1	B
2	2	AB, BB
3	3	ABB, BBB, BAB
4	5	ABBB, BBBB, BABB, ABAB, BBAB
5	8	ABBBB, BBBBB, BABBB, ABABB, BBABB, ABBAB, BBBAB, BABAB
⋮		
n	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	$(a_1 = 1,\ a_2 = 2)$

(b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

↳ alle Wörter der vorvorhergehenden Länge können durch AB ergänzt werden

→ alle Wörter der vorhergehenden Länge* können durch B ergänzt werden (Endung auf A nicht möglich!)

Dies sind alle möglichen Wörter (sonst hätte vorher schon ein Wort gefehlt)

(c) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n\to\infty} \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Der Quotient zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen f_n, f_{n+1} strebt gegen das Verhältnis des Goldenen Schnitts

---

(5)

$\mathbb{P}$ Keine Gruppe, denn $s,t \in \mathbb{P}: s\cdot t$ keine Primzahl, z.B. $2\cdot 3 = 6$ (G1) nicht erfüllt

$\mathbb{D}$ keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{D}: e\cdot t = t\cdot e = t \rightarrow e = 1$ kein Vielfaches von 3 (G3) nicht erfüllt

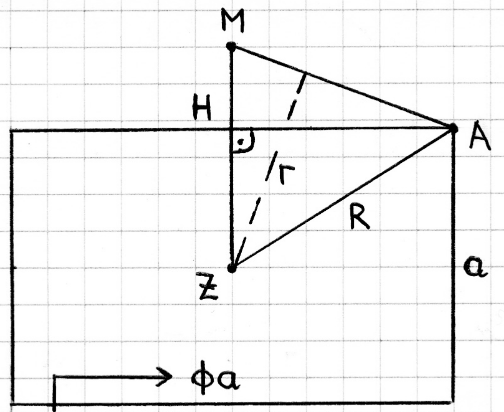
\$ keine Gruppe, denn $t \in \$: t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (Neutralelement) $\rightsquigarrow t^{-1} = \frac{1}{t}$ keine Quadratzahl (G4) nicht erfüllt

$\mathbb{Q}^+$ unendliche, kommutative Gruppe: (G1) Für bel. Bruchzahlen s,t ist $s\cdot t$ auch eine Bruchzahl (G2) Für bel. $r,s,t \in \mathbb{Q}^+$ gilt stets: $(r\cdot s)\cdot t = r\cdot(s\cdot t)$ (G3) $1 \in \mathbb{Q}^+$ und $t\cdot 1 = 1\cdot t = t$, alle $t \in \mathbb{Q}^+$ (G4) zu $t \in \mathbb{Q}^+$ ist $\frac{1}{t} =: t^{-1}$ auch Bruchzahl mit $t\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot t = 1$ (K6) Für $s,t \in \mathbb{Q}^+$ gilt $s\cdot t = t\cdot s$

---

(6)

(a) $|HA| = \frac{1}{2}a\cdot\phi$ (halbe Länge eines Gold. Rechtecks, $|ZH| = \frac{a}{2}$ (halbe Breite eines...)



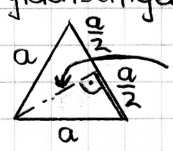
Goldenes Rechteck!

$$R \underset{\text{Pythagoras}}{=} \sqrt{|HA|^2 + |ZH|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\phi\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\phi^2 + 1}$$

$$\underset{\text{Tipp}}{=} \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2} + 1} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

(b) MA ist Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a

$|MA| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$



$\sqrt{\underbrace{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}_{\frac{3}{4}a^2}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$F_{\Delta ZAM} = \frac{1}{2}|MA|\cdot r = \frac{1}{2}|ZM|\cdot|HA|$, $|ZM| = \frac{1}{2}a\phi$ halbe Länge eines...

$$r = \frac{|ZM|\cdot|HA|}{|MA|} = \frac{\frac{1}{2}a\phi\ \frac{1}{2}a\phi}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\phi^2 \underset{\text{Tipp (a)}}{=} \frac{a}{2\sqrt{3}}\ \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$= \frac{a}{4\sqrt{3}}(\sqrt{5}+3) = \frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$$