Übungsserie 1

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 22. Oktober 2010** in der Vorlesung

1. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Kurve** γ beschrieben

$$\gamma:\ [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t-1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein ebenes Koordinatensystem (Anfangs- und Endpunkt beachten!). Berechnen Sie ferner die Koordinaten der Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen.

   (b) Bestimmen Sie die Gleichung von γ in der Form $y = f(x)$.

   (c) Geben Sie eine Darstellung von γ mit Parameter $t^\star$ und Parameterbereich $[0,1]$ an, so dass die Kurve in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

2. Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ wird **Parabel** genannt (die y-Achse heisst *Parabelachse*, der Schnittpunkt von Parabel und Parabelachse heisst *Scheitel*). Die Tangente t_p im Parabelpunkt $P = (x_P, y_P)$ hat (ohne Beweis) die Parametergleichung

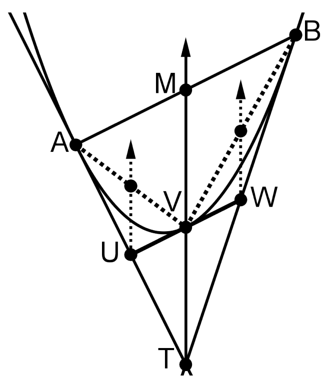
$$t_p :]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p + t \\ y_p + 2tx_p \end{pmatrix}.$$

   (a) Wie lauten *konkret* die Parametergleichungen der Tangenten t_A, t_B in den Parabelpunkten $A = (-1, ?)$ und $B = (2, ?)$? (Verwenden Sie als Parameter t für t_A, t^* für t_B)

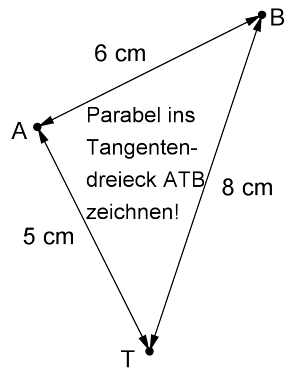
   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Tangentenschnittpunktes T von t_A und t_B.

   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Parabelsehne AB.
   Dies zeigt: Die Parallele zur Parabelachse durch den Tangentenschnittpunkt T verläuft durch die Parabelsehnen**mitte** M und „umgekehrt". Dieser Sachverhalt gilt **allgemein** und für **jede** Parabel.

   (d) Benutzen Sie folgenden Satz, um in Figur 1 die Parabel Punkt für Punkt „schön zu zeichnen". SATZ: Die **Mittellinie** UW im Tangentendreieck ATB ist eine Parabeltangente. Ihr **Mittelpunkt** V ist der Berührpunkt und auch die Mitte von TM.



Beweis des Satzes: Im Tangentendreieck ATB ist TM gemäss (c) eine Parabelachsenparallele. Im Schnittpunkt V von TM mit der Parabel wird die Parabeltangente gezeichnet. Sie schneide TA in U und TB in W. AUV und VWB sind wiederum Tangentendreiecke. Gemäss (c) verlaufen die Achsenparallelen durch U bzw. W durch die Sehnenmitten. Strahlensatzüberlegungen zeigen: U halbiert TA, W halbiert TB, UW ist parallel zu AB, V halbiert UW und auch TM.



Figur 1 (Aufgabe 2)

3. **Ableitungstraining:** Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

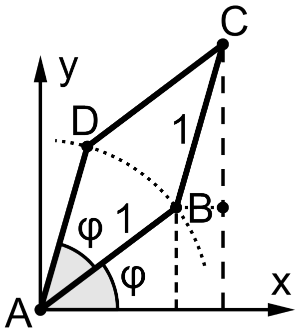
(a)	$x(t) = t - 1$	(b)	$y(t) = 2t - 1$	(c)	$y(t) = R\cos\left(\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\,t\right)$
(d)	$x(t) = at\cos t$	(e)	$y(t) = tR\sin\varphi$	(f)	$y(\varphi) = tR\sin\varphi$
(g)	$z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\varphi$	(h)	$z(t) = \frac{h}{2\pi}\varphi$	(i)	$y(\varphi) = e^\varphi \sin\varphi$

Übungsserie 1

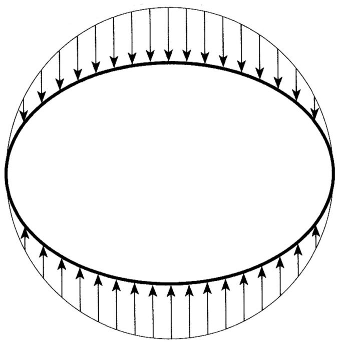
4. Ein **Gelenk-Rhombus** $ABCD$ mit der Seitenlänge 1 wird so um den Ursprung $O = A$ bewegt, dass der Punkt D doppelt so schnell ist wie der Punkt B (siehe Figur 2), d.h. $\sphericalangle(x\text{-Achse}, AB) = \sphericalangle(AB, AD) = \varphi$. Dabei bewegt sich der Punkt C um A herum.

   (a) Skizzieren Sie mit Einheit 4 cm die Positionen des mitbewegten Punktes C für die folgenden Winkel φ: 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180° und zeichnen Sie die Bahnkurve.

   (b) Wie lautet eine Parameterdarstellung dieser Bahnkurve? (Es ist eine spezielle Epizykloide)



Figur 2 (Aufgabe 4)



Figur 3 (Aufgabe 5)

5. **Stauchung** eines Kreises:

   (a) In einem Kreis vom Radius r wird ein Durchmesser gezeichnet und jeder Kreispunkt senkrecht zum Durchmesser vom Durchmesser aus mit dem Faktor $\lambda = \frac{7}{10}$ gestreckt (Figur 3). Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und zeigen Sie, dass dadurch eine **Ellipse** entsteht.

   (b) Die senkrecht am Himmel stehende Sonne beleuchtet mit parallelem Licht ein kreisförmiges **Dachfenster** in einer gegenüber der Horizontalen um $\alpha = 45°$ geneigten Dachfläche. Welche Form hat der Umriss des Lichtflecks auf dem horizontalen Dachboden? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

6. Die Projektion der **Raumkurve** γ auf die (x, y)-Ebene ist eine Ellipse mit Halbachsen der Längen 2 und 4, die auf der x- bzw. auf der y-Achse liegen. Die Projektion von γ auf die (x, z)-Ebene ist ebenfalls eine Ellipse jedoch mit Halbachsen der Längen 2 und 3, wobei letztere auf der z-Achse liegt.

   (a) Wie lautet eine Parameterdarstellung einer solchen Kurve γ?

   (b) Skizzieren Sie ferner die Projektion γ'' von γ auf die (y, z)-Ebene (Aufriss) in ein (y, z)-Koordinatensystem.

   (c) In welchen Punkten durchstösst die Raumkurve γ die 'vordere' Parallelebene zur (y, z)-Ebene mit Abstand $\sqrt{3}$? (Geben Sie die t-Werte und die Koordinaten der betreffenden Punkte an.)