Übungsserie 3

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 25. Februar 2011** in der Vorlesung

1. Laut Architekt E. BRANTSCHEN wurden bei dem eigenwilligen **Dach** der Kirche von St. Gallen Winkeln (Figur 1) in Längsrichtung des Daches *Parabeln* verwendet, in Querrichtung *Geraden*. In der Folge gehen wir von der vereinfachenden Annahme aus, dass der Grundriss des Daches ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 ist und der 'Öffnungsfaktor' der Parabeln 0.2 beträgt. (Der Parameter a in der Gleichung der Parabel $y = ax^2$ heisst *Öffnungsfaktor* der Parabel.)

   a) Führen Sie ein geeignetes räumliches Koordinatensystem ein. Skizzieren Sie (unter Berücksichtigung der Annahme) die Dachfläche durch ein angedeutetes Netz von Koordinatenlinien.

   b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Dachfläche.

   c) Ist die Dachfläche eine Regelfläche? Ist sie abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnung)

2. Der abgebildete gerade '**Ellipsenkegel**' entsteht, wenn man eine Gerade, die durch den Ursprung O (Kegelspitze) geht, an der Ellipse e entlangführt (Figur 2).

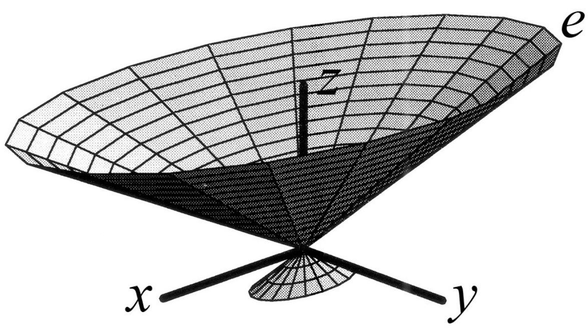
   a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung (Parameter t) der Ellipse e, die parallel zu der (x, y)-Ebene liegt, die Halbachsen $\sqrt{3}$ und 1 und den Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ besitzt.

   b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung (Parameter s, t) dieser (Doppel-) Kegelfläche.

   c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche her.

   d) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(s_0, t_0)$.

Figur 1 (Aufgabe 1) Kirche St. Gallen Winkeln



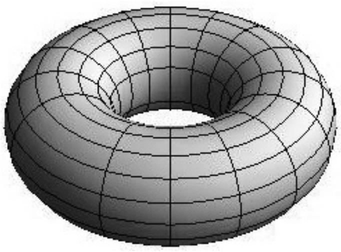
Figur 2 (Aufgabe 2)

3. Figur 3 zeigt einen **Torus** (Röhrenfläche vom Radius R um eine kreisförmige 'Mittellinie' vom Radius $2R$)

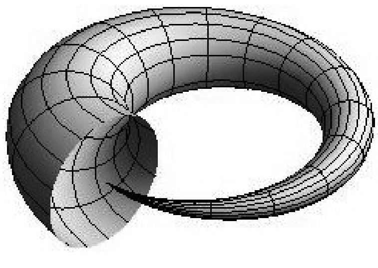
   a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und finden Sie eine Parameterdarstellung der Fläche mit den Parametern φ und t. (Tipp: Vgl. Bsp. 1.18 *Möbiusband* im Skript zur Vorlesung)

   b) Ändern Sie die Parameterdarstellung aus Teilaufgabe (a) so ab, dass der 'Röhrenradius' in einem Umlauf von 0 linear auf R zunimmt (Figur 4).

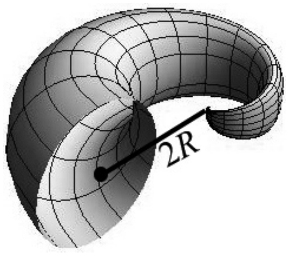
   c) Ändern Sie die Parameterdarstellung aus (b) so ab, dass der Radius der 'Mittellinie' in einem Umlauf von 0 linear auf $2R$ zunimmt (Figur 5).



Figur 3 (Aufgabe 3a)



Figur 4 (Aufgabe 3b)



Figur 5 (Aufgabe 3c)

Übungsserie 3

4. Der Kreis k (Radius 1, Mittelpunkt $(0,1,0)$) der parallel zur (x,z)-Ebene verläuft, wird an der z-Achse Punkt für Punkt gespiegelt. Verbindet man jeden Punkt A des Kreises k mit dem entsprechenden Spiegelpunkt $\tilde{A}$ entsteht durch die Schar dieser Verbindungslinien eine **Fläche** S.

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem den Kreis k und die Fläche S mithilfe einiger Verbindungslinien. Wie verlaufen die Verbindungslinien in Bezug zur z-Achse?

   b) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche S mit den Parametern φ und t.

   c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

   d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

   e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$.
   Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)