

Übungsserie 5

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 13. Mai 2011** in der Vorlesung

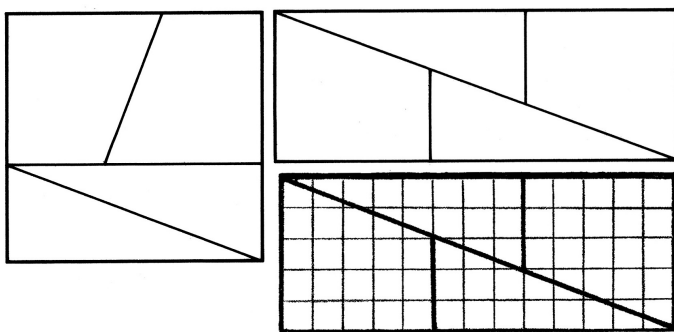
1. Sei f_n die n -te **Fibonacci-Zahl**. (Die FIBONACCI-Zahlen bilden die wohl bekannteste Zahlenfolge. Sie kommen an sehr vielen Stellen innerhalb und ausserhalb der Mathematik vor. Googlen Sie selbst!)

(a) Zeigen Sie, dass $f_3 f_1 - f_2^2 = 1$ ist und allgemein, dass die so genannte SIMPSON-Identität $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ gilt.

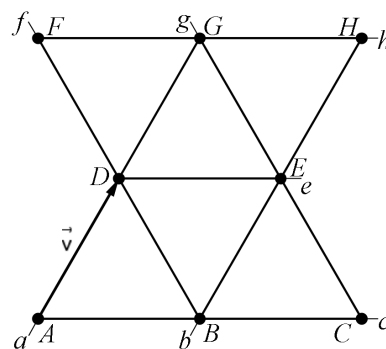
(Zeigen Sie: $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)(f_n f_{n-2} - f_{n-1}^2)$ und schliessen Sie induktiv weiter auf $f_3 f_1 - f_2^2$.)

(b) Ein Quadrat wird durch einen Schnitt parallel zu einer Seite in zwei Teile unterteilt, welche je in zwei kongruente Stücke halbiert werden (Figur 1a). In welchem Verhältnis muss man das Quadrat unterteilen, damit die entstehenden Stücke zusammengefügt wie in Figur 1b tatsächlich ein Rechteck ergeben?

Trugschluss: Wird ein Quadrat mit Seitenlänge $f_n \stackrel{z.B.}{=} 8$ im Verhältnis von $f_{n-1} = 5$ und $f_{n-2} = 3$ unterteilt, ergibt sich nur scheinbar ein Rechteck (Figur 1c). Dies äussert sich darin, dass zwischen Scheinrechteck und Quadrat der Flächenunterschied $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = 13 \cdot 5 - 8^2 = 1$ besteht!



Figur 1 (a links, b oben, c unten) (Aufgabe 1)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. **Abbildungstraining:** Figur 2 zeigt ein Netz von gleichseitigen Dreiecken mit den Gitterpunkten A, \dots, H , mit den Gittergeraden a, \dots, h und mit dem Vektor \vec{v} .

(a) Geben Sie eine Translation an, welche den Punkt B auf den Punkt H abbildet; eine Spiegelung, welche H auf D abbildet und eine Rotation, welche D auf C abbildet. (Verwenden Sie dazu nur die in Figur 2 vorhandenen, beschrifteten Objekte.)

(b) Der Punkt A soll durch eine Rotation auf den Punkt E abgebildet werden. Geben Sie drei Lösungen mit drei verschiedenen Drehzentren (ausgewählt aus A, \dots, H) an.

(c) Sei $T = R_{E,120^\circ} \circ R_{D,120^\circ} \circ R_{B,120^\circ}$. Bestimmen Sie die Bilder $T(C), T(E)$ von C bzw. E . Um was für eine besondere Transformation handelt es sich vermutlich?

3. **Abstrakte Gruppen:** Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen \cdot) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

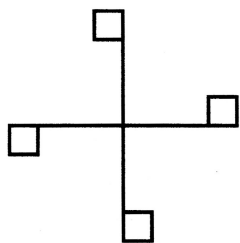
- \mathbb{R}^- Menge der negativen reellen Zahlen
- \mathbb{G} Menge der positiven, geraden Zahlen
- \mathbb{IN} Menge der natürlichen Zahlen
- \mathbb{R}^+ Menge der positiven reellen Zahlen

Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das 'erste', nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen.

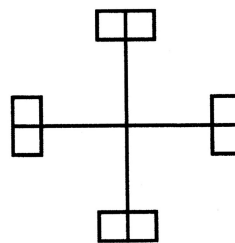
Übungsserie 5

4. Gegeben sind die Figuren Ω_1 und Ω_2 .

- (a) Führen Sie Bezeichnungen ein und ermitteln Sie für Ω_1 alle vier bzw. für Ω_2 alle acht Kongruenztransformationen, welche die Figur mit sich selbst zur Deckung bringen.
- (b) Stellen Sie für die Transformationen zu Ω_1 die zugehörige **Verknüpfungstafel** auf.



Figur Ω_1



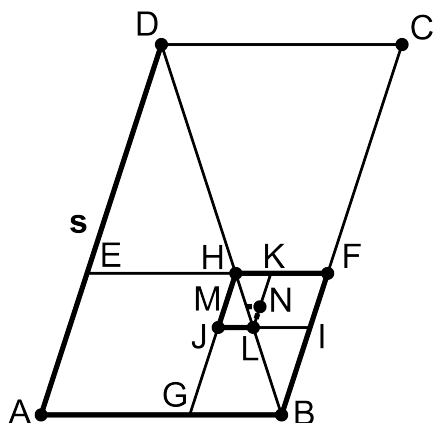
Figur Ω_2

5. Das **Goldene Dreieck** ABD mit Schenkellänge s wird durch ein gleiches Goldenes Dreieck CDB zum **Parallelogramm** $ABCD$ ergänzt (Figur 3). Schneidet man vom Parallelogramm $ABCD$ den Rhombus $CDEF$ ab, entsteht das Parallelogramm $ABFE$, von welchem wiederum ein Rhombus abgeschnitten wird und so weiter ad infinitum.

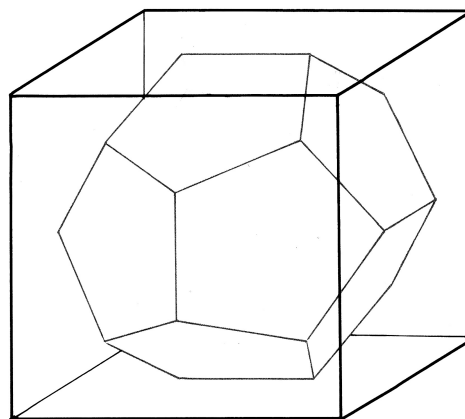
- (a) Begründen Sie, dass für die Seiten beim Parallelogramm $ABFE$ gilt: $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (= \phi)$
- (b) Berechnen Sie die Länge L der ‘Spirale’ $DABFHJLN \dots$ (ausgedrückt durch s) durch Ausnutzen der ‘Selbstähnlichkeit’. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)
- (c) Beschreiben Sie die Lage des Zentrums der ‘Spirale’ und begründen Sie Ihre Antwort.

6. Man kann aus den 20 Ecken eines **regulären Dodekaeders** (Figur 4) 8 so auswählen, dass sie einen Innenwürfel bilden (Skizzieren Sie den Innenwürfel!). Die Würfelkanten sind dann stets Fünfeck-Diagonalen. In dieser Aufgabe berechnen Sie das Volumen des Dodekaeders mit Kantenlänge $a = 1$, indem Sie es als Würfel mit auf den Würfelseitenflächen aufgesetzten ‘Walmdächern’ auffassen. (Lassen Sie in Ihrer Rechnung $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\dots$ stehen, vereinfachen Sie aber soweit als möglich mithilfe von $\phi^2 = \phi + 1$ und $\phi^3 = 2\phi + 1$.)

- (a) Welchen Volumeninhalt besitzt der Innenwürfel? [Lösung: $2\phi + 1$]
- (b) Wie hoch sind die auf den Würfelseitenflächen aufgesetzten Walmdächer? [Lösung: $\frac{1}{2}$]
- (c) Wie gross ist der Volumeninhalt eines Walmdaches? [Lösung: $\frac{1}{4}\phi + \frac{1}{6}$]
- (d) Welchen Volumeninhalt ergibt sich für das Dodekaeder? [Lösung: $(\frac{7}{2}\phi + 2)a^3 \approx 7.66a^3$]



Figur 3 (Aufgabe 5)



Figur 4 (Aufgabe 6)