Zusatzserie 6

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 21. Mai 2010** in der Vorlesung

1. Wir betrachten die **Buchstaben**: A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z.

   (a) Ordnen Sie alle ihrer jeweiligen Symmetriegruppe $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ zu.

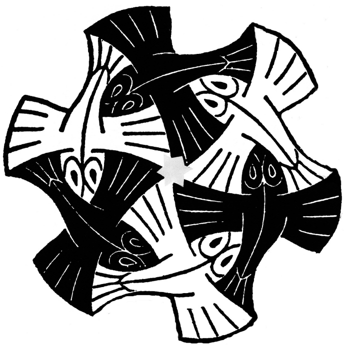
   (b) Bilden Sie aus den obigen Grossbuchstaben dreibuchstabige Wörter, so dass das entsprechende Wort als Ganzes die folgende Symmetriegruppe besitzt:
   (b1) $\mathbb{D}_1$, (b2) $\mathbb{D}_2$, (b3) $\mathbb{C}_2$

2. $\text{Symm}(\Omega_1)$ bzw. $\text{Symm}(\Omega_2)$ bezeichnet die Menge aller **Symmetrietransformationen** der Figur Ω_1 bzw. der Figur Ω_2. (kleine Zeichenungenauigkeiten bitte ignorieren, Färbung berücksichtigen)

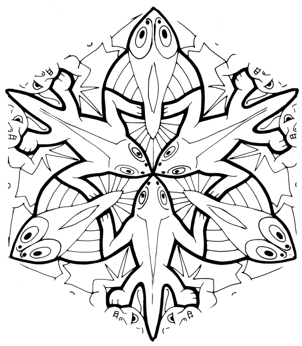
   (a) Ermitteln Sie $\text{Symm}(\Omega_1)$ und $\text{Symm}(\Omega_2)$. (Führen Sie geeignete Bezeichnungen ein.)

   (b) Stellen Sie von $\text{Symm}(\Omega_1)$ die zugehörige Gruppentafel auf.

   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe von dieser Gruppentafel alle Lösungen X (Symmetrietransformationen von Ω_1) der folgenden Gleichungen:
   (c1) $R_{Z,120^\circ} \circ X = I$, (c2) $X \circ X = R_{Z,120^\circ}$, (c3) $X \circ X \circ X = I$



Figur Ω_1



Figur Ω_2

3. Die Menge der **Symmetrietransformationen** $\text{Symm}(\Omega)$ einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch $\text{Symm}(\Omega) = \{I, X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

   (a) Vervollständigen Sie die abgebildete Tafel, so dass eine Gruppe entsteht.

$\circ$	I	X_1	X_2	X_3	X_4
I					
X_1		X_2	X_3		
X_2		X_3			
X_3					
X_4					

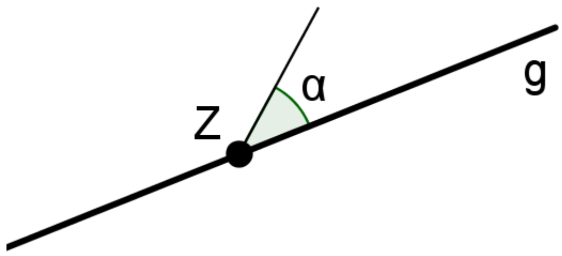
   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur, welche die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie anschliessend geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie eine mögliche 'Lösung' für X_1, X_2, X_3 und X_4 an.

Zusatzserie 6

4. **Rotation und Geradenspiegelung:** Das Rotationszentrum Z liegt auf der Spiegelungsgeraden g, für den Drehwinkel α gilt $0 < \alpha < 360°$.

   (a) Untersuchen Sie die Verkettung $R_{Z,\alpha} \circ S_g$ der Geradenspiegelung S_g und der Rotation $R_{Z,\alpha}$. Anleitung: Mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Skript zur Vorlesung) bestimmen Sie den 'Typ' der Kongruenztransformation und mit Hilfe der Bilder $P' = S_g(P)$ und $P'' = R_{Z,\alpha}(P')$ eines gewählten Punktes P die Lage des bestimmenden Elements.

   (b) Untersuchen Sie die Spezialfälle $\alpha = 0°$ und $\alpha = 180°$ sowie die Verkettung $S_g \circ R_{Z,\alpha}$ ('zuerst S_g, dann $R_{Z,\alpha}$').



5. Bezeichne Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der **Symmetriegruppe** der ebenen Figur Ω und Z einen Punkt von Ω. Von der Menge Symm(Ω) ist bekannt, dass sie die Rotation $R_{Z,90°}$ umfasst.

   (a) Welche Elemente umfasst Symm(Ω) im Minimum? Geben Sie ferner von jedem Element an (ohne Beweis), wie es durch Verketten von $R_{Z,90°}$ erzeugt werden kann.

   (b) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus Teilaufgabe (a). (Z angeben!)

   (c) Symm(Ω) umfasse neben $R_{Z,90°}$ auch noch die Spiegelung S_g, wobei die Gerade g durch Z geht. Welche Elemente umfasst nun Symm(Ω) mindestens? Geben Sie ferner von jedem Element an (ohne Beweis), wie es durch Verketten von $R_{Z,90°}$ und S_g erzeugt werden kann.

   (d) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus (c). (Z und g angeben!)