Übungsserie 1

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 21. Oktober 2011** in der Vorlesung

1. Die **Kurve** γ wird beschrieben durch: $\gamma:\ [-3,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} t^2+2\,t \\ t+1 \end{pmatrix}$

   (a) Skizzieren Sie die Kurve γ in ein ebenes Koordinatensystem. (Anfangs- und Endpunkt beachten!) *Berechnen* Sie ferner die Koordinaten der Schnittpunkte von γ mit den Koordinatenachsen.

   (b) Bestimmen Sie die Gleichung von γ in der Form $x = f(y)$. Um was für eine Kurve handelt es sich?

2. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Raumkurve** γ beschrieben

$$\gamma :]-\infty,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 4-4t \\ 2t+1 \\ 4t \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie γ und ihren Grundriss γ' in ein räumliches Koordinatensystem. Um was für spezielle Kurven handelt es sich?

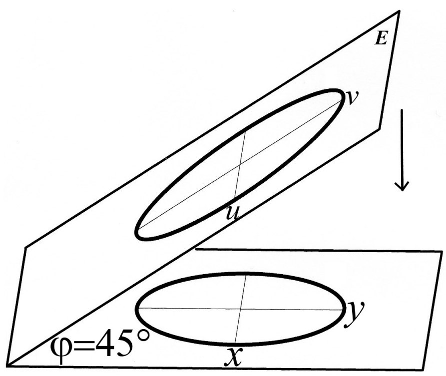
   (b) Welchen t-Wert hat der Schnittpunkt von γ mit der (x,y)-Ebene bzw. jener mit der (y,z)-Ebene? Welche Koordinaten haben diese Punkte?

   (c) Bestimmen Sie eine Gleichung von γ' (aufgefasst als Kurve in der (x,y)-Ebene) in der Form $y = f(x)$.

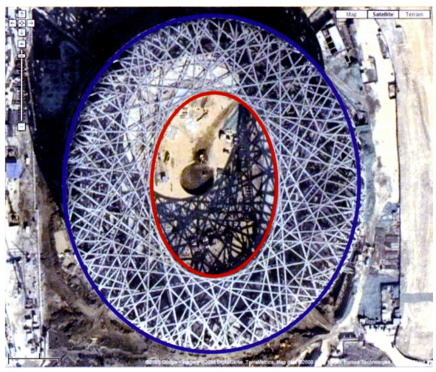
3. Eine **Uhr** liegt in der mit 45° gegenüber dem Boden geneigten transparenten Ebene E, der 2 m lange Sekundenzeiger starte zur Zeit $t = 0\,[\mathrm{s}]$ bei 12 Uhr im höchsten Punkt (Figur 1).

   (a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bewegung, die die Spitze der (vertikalen) Projektion des Sekundenzeigers auf dem Boden beschreibt.

   (b) Was für eine Kurve wird dadurch auf dem Boden beschrieben (Angabe der wesentlichen Elemente)? Wird sie 'gleichmässig schnell' durchlaufen (ja oder nein)?



Figur 1 (Aufgabe 3)



Das Pekinger Nationalstadion von Herzog & de Meuron (im Bau 2007): Die Aussenform und das „Loch" im Dach sind näherungsweise Ellipsen.

4. **Ableitungstraining:** Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

(a) $x(t) = 4t$	(b) $y(t) = 1+3t$	(c) $x(t) = R\sin\left(\frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\,t\right)$
(d) $y(t) = at\sin t$	(e) $x(t) = tR\cos\varphi$	(f) $x(\varphi) = tR\cos\varphi$
(g) $z(t) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(h) $z(\varphi) = \frac{h}{2\pi}\,\varphi$	(i) $x(\varphi) = e^{\varphi}\cos\varphi$

Übungsserie 1

5. Figur 2 zeigt ein **Schrauben-Minarett** (Irak, um 900). (Annahmen: Der Weg führe vom Grundkreis (Radius R) in 6 Umrundungen zur Spitze (Radius ≈ 0), der Höhenunterschied betrage dabei H.)

   (a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve, die ungefähr wie der abgebildete Weg aussieht. (Tipp: Betrachten Sie zuerst den Grundriss des Weges und gehen Sie von einer konst. Radiusdifferenz pro Umlauf aus.)

   (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Kurve mit dem z-Wert (Höhe über der Grundkreisebene) des Kurvenpunkts als Parameter.

6. Ein **Stab** AB der Länge 8 [cm] liegt mit dem Punkt A im Innern einer halbkreisförmigen Schale (Radius 4 [cm]) auf und ragt über den Rand O der Schale hinaus (Figur 3). Wenn A in der Schale verschoben wird, bewegt sich B entlang einer Kurve γ.

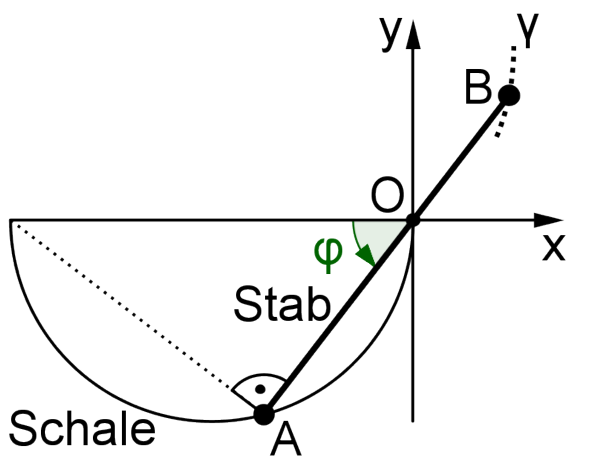
   (a) Skizzieren Sie γ mithilfe der Punkte B zu den Winkeln φ: 0°, 30°, 45°, 60°, 75°. (D.h. A liegt auf dem Halbkreis, sodass $\sphericalangle$(negative x-Achse, AO) $= \varphi$ und AB via O Länge 8 [cm] hat)

   (b) Wie lautet eine Parameterdarstellung von γ? (Bestimmen Sie dazu die Koordinaten x und y von B als Funktionen von φ.)

   (c) Zeigen Sie, dass γ auch durch die Parameterdarstellung $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -8t^2 + 8t \\ (8-8t)\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ beschrieben wird. (Tipp: Setzen Sie in Teilaufgabe (b) $t = \cos\varphi$ mit $0 \leq t \leq 1$)

   (d) Für welchen Parameterwert t liegt der Punkt B am weitesten rechts? Wie gross ist dann der x-Wert von B?

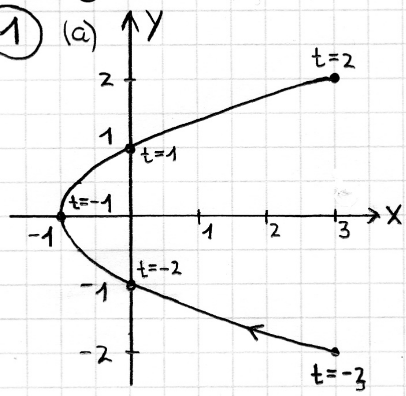
Figur 2 (Aufgabe 5)



Figur 3 (Aufgabe 6)

Übungsserie 1, HS 2011, Seite 1

1 (a)



$$\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t^2+2t\\t+1\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 = t(t+2) \to t_1 = 0, \quad t_2 = -2$$

in $y(t)$: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$

Schnittpunkte y-Achse: $\underline{\underline{(0,1)}}$ und $\underline{\underline{(0,-1)}}$

$$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t^2+2t\\t+1\end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 = t+1 \rightsquigarrow t_3 = -1, \text{ in } x(t): x_3 = -1$$

Schnittpunkt x-Achse: $\underline{\underline{(-1,0)}}$

(b) $x = t^2 + 2t$

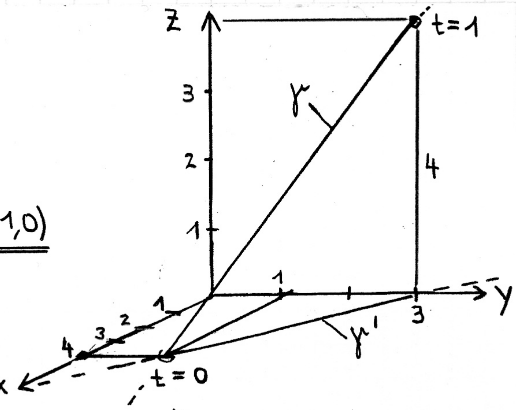
$y = t + 1 \leftrightarrow t = y - 1$ in $x(t)$: $x = (y-1)^2 + 2(y-1)$

$x = y^2 - 2y + 1 + 2y - 2$

$\underline{\underline{x = y^2 - 1}}$ liegende Parabel

---

2 (a) **Geraden!** $\left(\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}4-4t\\2t+1\\4t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} \right)$



(b) $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}4-4t\\2t+1\\4t\end{pmatrix} \to \underline{\underline{t=0}}$, in $\left.\begin{matrix}x(t) = 4 - 0 = 4\\ y(t) = 0 + 1 = 1\end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{(4,1,0)}}$

$\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}4-4t\\2t+1\\4t\end{pmatrix} \to \underline{\underline{t=1}}$, in $\left.\begin{matrix}x(t) = 0\\ y(t) = 3\\ z(t) = 4\end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \underline{\underline{(0,3,4)}}$

(c) γ': $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-4t\\2t+1\end{pmatrix}$ (kein z)

$x(t) = 4 - 4t$, $4t = 4 - x$, $t = 1 - \frac{x}{4}$, in $y(t)$

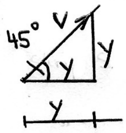
$y(t) = 2\cdot\left(1 - \frac{x}{4}\right) + 1 = -\frac{x}{2} + 3$, $\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} + 3}}$

---

3 (a) (Skript 5.7)

$u(t) = R\sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right)$

$v(t) = \underbrace{R}_{2\,[m]}\cos\left(\frac{2\pi}{60}t\right)$



$x(t) = u(t)$

$y(t) = \underbrace{\sin(45°)}_{\sqrt{2}/2} v(t)$

$$t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}2\sin\left(\frac{2\pi}{60}t\right)\\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{60}t\right)\end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 60$$

(b) Ellipse mit Halbachsen der Längen 2 und $\sqrt{2}$ Nein (Schnelligkeit variiert)

Zur Erinnerung die Regeln:

① $(x^n)' = nx^{n-1}$, speziell: $(x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$, $(\text{Zahl})' = 0$

② $(f+g)' = f' + g'$ ③ $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$

④ Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Abl}}$

⑤ Produktregel $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

4 (a) $x'(t) = (4t)' \overset{①}{=} 4\cdot 1 = \underline{4}$

(b) $y'(t) = (1+3t)' \overset{②}{=} (1)' + (3t)' \overset{①}{=} 0 + 3\cdot 1 = \underline{3}$

(c) $x'(t) = \left(R\underbrace{\sin}_{f}\underbrace{\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)}_{g}\right)' \overset{③④}{=} R\underbrace{\cos}_{f'}\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)'}_{\text{innere Abl}} \overset{①}{=} R\cos\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\frac{2\pi}{60s}}_{g'} = \underline{\underline{\frac{2\pi R}{60s}\cos\left(\frac{2\pi}{60s}t\right)}}$

(d) $y'(t) = (\underbrace{at\sin t}_{f\cdot g})' \overset{⑤}{=} a[\underbrace{(t)'\sin t}_{f'\cdot g} + \underbrace{t\cdot(\sin t)'}_{f\cdot g'}] \overset{①③}{=} a[1\cdot\sin t + t\cos t] = \underline{\underline{a\sin t + at\cos t}}$

(e) $x'(t) = (tR\cos\varphi)' = R\cos\varphi\cdot(t)' = \underline{\underline{R\cos\varphi}}$ (f) $x'(\varphi) = (tR\cos\varphi)' = tR(\cos\varphi)' \overset{③}{=} \underline{\underline{-tR\sin\varphi}}$

5 Wahl des KS: z-Achse $\hat{=}$ Turmachse, Anfangspunkt $(R,0,0)$, Endpunkt $(0,0,H)$

(a) Grundriss: "Verjüngende" Spirale beginnend mit Radius $r=R$, Parameter $t \hat{=}$ Drehwinkel, in 6 Windungen ($\hat{=} 6\cdot 2\pi$) Abnahme um R: $\frac{R}{12\pi}$ Radiusdifferenz pro Winkeleinheit

$$x(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)}_{\text{Radius}} \cos t \ , \quad y(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)}_{\text{Radius}} \sin t \quad (0 \leq t \leq 6\cdot 2\pi)$$

Höhe: In 6 Windungen ($\hat{=} 6\cdot 2\pi$) Höhe H $\rightsquigarrow \frac{H}{12\pi}$ Höhendifferenz pro Winkeleinheit

$$z(t) = \frac{H}{12\pi} t$$

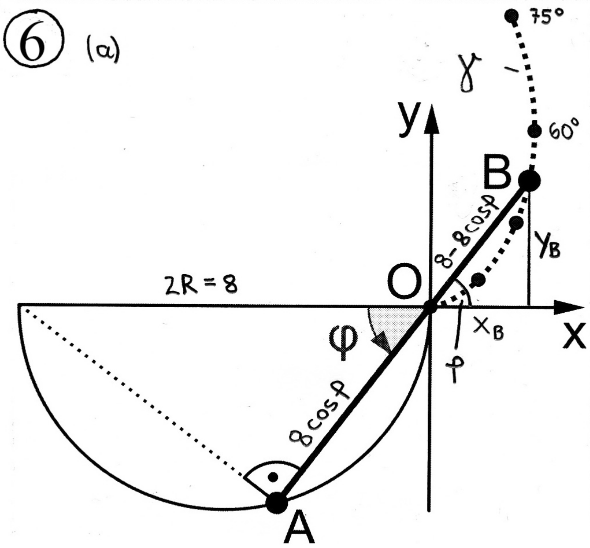
$$\gamma: [0, 12\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\cos t \\ \left(R - \frac{R}{12\pi}t\right)\sin t \\ H/12\pi \cdot t \end{pmatrix}$$

(b) $z(t) = \frac{H}{12\pi} t \rightsquigarrow t = \frac{12\pi}{H} z$

$$\gamma: [0, H] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ z \longmapsto \vec{r}(z) = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{H}z\right)\cos\left(\frac{12\pi}{H}z\right) \\ \left(R - \frac{R}{H}z\right)\sin\left(\frac{12\pi}{H}z\right) \\ z \end{pmatrix}$$

---

6 (a)



(b) $x_B = |OB| \cos\varphi = (8 - 8\cos\varphi)\cos\varphi$ $\quad (0 \leq \varphi < 90°)$

$y_B = |OB| \sin\varphi = (8 - 8\cos\varphi)\sin\varphi$

$$\gamma: \ \varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8\cos\varphi - 8\cos^2\varphi \\ (8 - 8\cos\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(c) $t = \cos\varphi$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-t^2}$

$$\gamma: \ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 8t - 8t^2 \\ (8-8t)\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad (0 < t \leq 1)$$

(d) Im Punkt am weitesten rechts ist $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ vertikal, d.h. $= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} \neq 0$

$0 \stackrel{\text{Soll}}{=} x'(t) = (8t - 8t^2)' = 8 - 8\cdot 2t \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$

$x\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{2} - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{2}}$ (das ist bei $\varphi = 60°$!)