Übungsserie 2

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 25. November 2011** in der Vorlesung

1. Die Punkte $A(2,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,4)$, $O(0,0,0)$ legen eine **Pyramide** mit der dreieckigen 'Grundfläche' ABC fest. Die Seitenflächen sind rechtwinklige Dreiecke!

   a) Skizzieren Sie die Pyramide $ABCO$ in ein räumliches Koordinatensystem.

   b) Berechnen Sie zu jeder Dreiecksfläche den nach aussen gerichteten Normalenvektor: $\vec{n}_1 = \vec{OC} \times \vec{OB}$, $\vec{n}_2 = \vec{OA} \times \vec{OC}$, $\vec{n}_3 = \vec{OB} \times \vec{OA}$, $\vec{n}_G = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

   c) Für den Flächeninhalt F eines beliebigen von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks gilt: $F = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Begründen Sie kurz diese Formel.

   d) Berechnen Sie mithilfe von (b), (c) die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3 der drei Seitenflächen und jenen, F_G, der Grundfläche und zeigen Sie, dass der **räumliche Satz des Pythagoras** gilt: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_G^2$. (Der räumliche Satz des Pythagoras gilt allgemein für eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, deren Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke sind.)

2. Ein **Wasserstrahl** wird von einer Düse (Koordinatenursprung) schräg zum horizontalen Boden (x-Achse) ausgestossen. Der y-Wert entspricht der Höhe über dem Boden, der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Die Parameterdarstellung für die Bahnkurve eines Wasserteilchens mit der Zeit t als Parameter ist gegeben durch: (Einheiten in Meter bzw. Sekunden, T bezeichnet die Flugzeit)

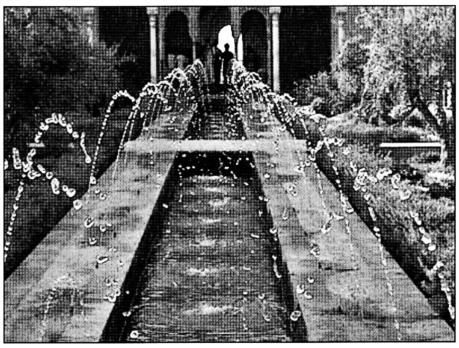
$$\gamma: \ [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} 5t \\ 7.7t - 5t^2 \end{pmatrix}$$

   a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor im Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ sowie im Punkt $(0,0)$.

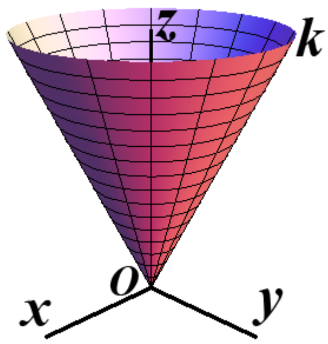
   b) Wie schnell und unter welchem Winkel (bez. der x-Achse) schiesst das Wasser aus der Düse?

   c) Bestimmen Sie die Koordinaten des höchsten Punkts der Bahn.

   Viele Gartenarchitekten nutzen die Tatsache, dass Wasserstrahlen, die schräg nach oben aus einer Düse austreten, eine parabelförmige Flugbahn aufweisen. Besonders eindrucksvolle Wasserspiele, die darauf basieren, kann man in den Gärten der Alhambra (Figur 1) beobachten. Auch neuzeitliche Architekten nutzen solche Effekte.



Figur 1 (Aufgabe 2)



Figur 2 (Aufgabe 3)

3. Der **Kreiskegel** S mit Spitze O in Figur 2 entsteht, wenn man eine Stange, welche stets durch O geht, am horizontalen Kreis k mit Mittelpunkt in $(0,0,2)$ und Radius 1 entlangführt.

   a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche S mit den Parametern φ und t.

   b) Was für Kurven sind die φ-Linien? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente) Wie lautet die Parameterdarstellung der φ-Linie zu $t = 0.5$?

   c) Was für Kurven sind die t-Linien? Wie lautet die Parameterdrst. der t-Linie zu $\varphi = 0$?

Bitte wenden!

Übungsserie 2

4. Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi,t)\longmapsto \vec{r}\,(\varphi,t):=\begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ \cos t\end{pmatrix} \qquad (0\le\varphi<2\pi\,,\ 0\le t<\infty)$$

   a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die t-Linien zu $\varphi=0$ und $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Um was für Kurven handelt es sich?

   b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die φ-Linien zu $t=0$ (Sonderfall), $t=\frac{\pi}{2}$ und $t=2\pi$. Was für Kurven sind die φ-Linien? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)

   c) Skizzieren Sie nun die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien.

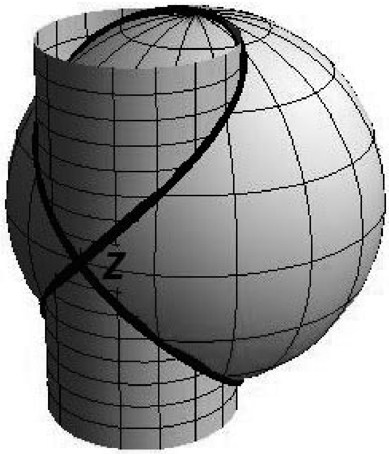
5. Figur 3 zeigt die **Viviani-Kurve** benannt nach ihrem Entdecker VINCENZO VIVIANI (ital. Mathematiker, 1622-1703). Sie ist gegeben durch $\gamma:\ [0,2\pi]\longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t\longmapsto \vec{r}(t):=\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$

   a) 'Erraten' Sie die t-Werte und den Punkt Z, in dem sich die Kurve selbst durchdringt.

   b) Zeigen Sie, dass ein allgemeiner Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ vom Koordinatenursprung den Abstand 1 hat. (D.h. der Kurvenpunkt liegt auf der abgebildeten Einheitskugel K! Ähnlich lässt sich zeigen, dass der Kurvenpunkt auch auf dem abgebildeten Zylinder mit dem Radius $\frac{1}{2}$ liegt. Damit ist gezeigt, dass die oben gegebene Viviani-Kurve als Schnittkurve von Kugel K und Zylinder aufgefasst werden kann.)

   c) Skizzieren Sie sorgfältig Grundriss γ' und Seitenriss $\tilde{\gamma}$ (Projektion auf die (x,z)-Ebene) der Kurve γ. (Umriss der Einheitskugel K und jeweilige Koordinatenachsen als Orientierungshilfe eintragen) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\tilde{\gamma}$? (Rechnerische Begründung)

   d) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Punkt Z rechtwinklig durchdringt.



Figur 3 (Aufgabe 5)

Wasserwellen

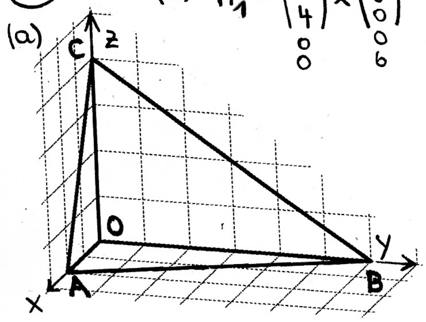
6. **Vektorprodukttraining:** Berechnen Sie: (a) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}R\\ 0\\ \frac{h}{2\pi}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ R\\ 0\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}t_0R\cos\varphi_0\\ t_0R\sin\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-R\sin\varphi_0\\ R\cos\varphi_0\\ h\end{pmatrix}$

   Berechnen Sie ferner $\vec{s}\times\vec{t}$, wobei $\vec{s}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi,t)$ nach φ, und $\vec{t}$ die Ableitung von $\vec{r}\,(\varphi,t)$ nach t bedeutet, für (c) $\vec{r}\,(\varphi,t)=\begin{pmatrix}t\cos\varphi\\ t\sin\varphi\\ t\varphi\end{pmatrix}$ und (d) $\vec{r}\,(\varphi,t)=\begin{pmatrix}2\cos\varphi\\ t\\ t^2+2\sin\varphi\end{pmatrix}$

Übungsserie 2 HS 2011 Seite 1

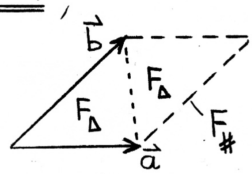
1

(a)



(b) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-24\\0\\0\end{pmatrix}}}$ $\quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix}}}$ $\quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}}}$,

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_G = \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}24\\8\\12\end{pmatrix}}}$



(c) Für das von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm: $F_\# = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Dreieck : $F_\Delta = \frac{1}{2} F_\# = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

(d) $F_1 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}-24\\0\\0\end{pmatrix} \right| = 12$, $F_2 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}0\\-8\\0\end{pmatrix} \right| = \underline{4}$, $F_3 = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix} \right| = \underline{6}$

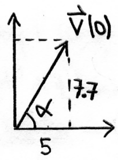
$F_G = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}24\\8\\12\end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 6^2} = \underline{\underline{14}}$, es ist $12^2 + 4^2 + 6^2 = 14^2$ ✓

---

2 (a) $\vec{v}(t) \underset{\uparrow}{=} \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix}5\\7.7 - 10t\end{pmatrix}$, im Punkt $(0,0)$ ist $t = 0$: $\vec{v}(0) = \vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix}5\\7.7\end{pmatrix}$

$t \mathrel{\hat{=}}$ zeit

(b) $\vec{v}(0) = \begin{pmatrix}5\\7.7\end{pmatrix}$, x-Richtung: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ Für den Zw.* α gilt : $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}5\\7.7\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}5\\7.7\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right|} = \dfrac{5}{9.18 \cdot 1} \to \underline{\underline{\alpha = 57^\circ}}$



(c) Im höchsten Punkt der Bahn ist $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ <u>horizontal</u> : $\begin{pmatrix}5\\7.7 - 10t\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}\cdots\\0\end{pmatrix} \to 7.7 - 10t = 0$

$7.7 = 10t$

$t_h = 0.77$ in $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}5t\\7.7t - 5t^2\end{pmatrix} \underset{t=0.77}{=} \begin{pmatrix}3.85\\2.9645\end{pmatrix} \to \underline{\underline{(3.85,\ 2.9645)}}$

---

3 (a) Kreis K mit Radius 1 und Mittelpunkt (0,0,2) : $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 \cdot \cos\varphi\\1 \cdot \sin\varphi\\2\end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Um eine Linie OB_φ von der Spitze O zum Kreispunkt $B_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, 2)$ zu "zeichnen" ist ein Parameter t nötig. Für einen Flächenpunkt $\vec{r}$ auf der Linie OB_φ gilt:

$\vec{r} = \vec{OO} + t\,\vec{OB_\varphi} = t\,\vec{OB_\varphi} = t \begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\cos\varphi\\t\sin\varphi\\2t\end{pmatrix}$, d.h. $\underline{\underline{(\varphi, t) \mapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix}t\cos\varphi\\t\sin\varphi\\2t\end{pmatrix}}}$ $\quad \begin{matrix}0 \le \varphi \le 2\pi\\0 \le t \le 1\end{matrix}$

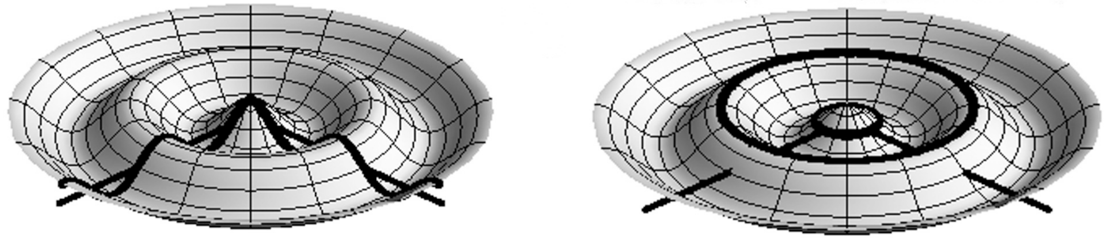
(b) φ-Linien (t fest, φ variiert) : Kreise mit Mittelpt $(0,0,2t)$ parallel zur (x,y)-Ebene mit Radius t $(t > 0)$

φ-Linie zu $t = 0.5$: $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi, 0.5) = \begin{pmatrix}0.5\cos\varphi\\0.5\sin\varphi\\1\end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

(c) t-Linien (φ fest, t variiert) : Geradenstücke (Mantellinien) durch O verlaufend

t-Linie zu $\varphi = 0$: $t \mapsto \vec{r}(0, t) = \begin{pmatrix}t\cos 0\\t\sin 0\\2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\0\\2t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le 1$

4



4 (a) t-Linie zu $\varphi=0$: $t \longmapsto \vec{r}(0,t)=\begin{pmatrix} t\cos 0\\ t\sin 0\\ \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t\\ 0\\ \cos t\end{pmatrix}$, zu $\varphi=\frac{\pi}{2}$: $t \longmapsto \vec{r}\left(\frac{\pi}{2},t\right)=\begin{pmatrix} t\cos\frac{\pi}{2}\\ t\sin\pi/2\\ \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ t\\ \cos t\end{pmatrix}$

"stehende" Kosinuskurve entlang positive x-Achse — "st." Kosinuskurve entlang pos. y-Achse

(b) φ-Linie zu $t=0$: $\varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi,0)=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \cos 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ Punkt! (Rotationszentrum) symmetrie

φ-Linie zu $t=\frac{\pi}{2}$: $\varphi \longmapsto \vec{r}\left(\varphi,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix} \pi/2\cos\varphi\\ \pi/2\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$ — φ-Linie zu $t=2\pi$: $\varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi,2\pi)=\begin{pmatrix} 2\pi\cos\varphi\\ 2\pi\sin\varphi\\ 1\end{pmatrix}$

φ-Linien sind Kreise mit Mittelpt $(0,0,\cos t)$ parallel zur (x,y)-Ebene mit Radius t

---

5 (a) Vermutung $\underline{Z=(1,0,0)}$: $\underline{t=0} \rightsquigarrow \vec{r}(0)=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\underline{t=\pi} \rightsquigarrow \vec{r}(\pi)=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ ✓

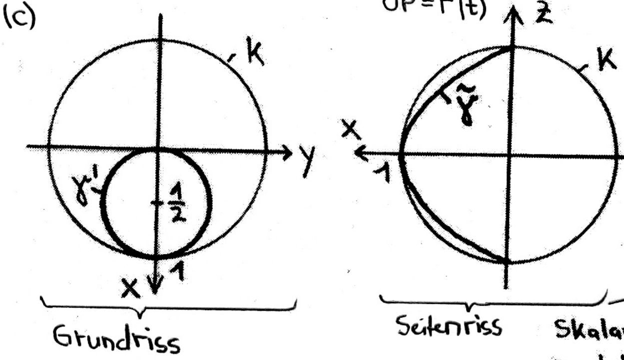
$x(t)=\cos^2(t)$
$y(t)=\sin t\cos t$
$z(t)=\sin t$

(Idee: Kurve scheint symmetrisch, $z(t)=\sin t$ von -1 (unten?) bis 1 (oben?) $\rightarrow$ Mitte: $\underline{z=0}$)

(b) Abstand von $(0,0,0)$:

$$\left\|\underbrace{\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{P}-\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}}_{O}\right\|=\left\|\underbrace{\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}}_{\vec{OP}=\vec{r}(t)}\right\|=\sqrt{\cos^4 t+\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\cos^2 t+\underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}}=\sqrt{\cos^4 t+\cos^2 t-\cos^4 t+1-\cos^2 t}=\underline{\underline{1}}$$

(c)



$\tilde{\gamma}$ ist eine $\underline{\underline{\text{Parabel}}}$: $x(t)=\cos^2 t=1-\sin^2 t=1-z(t)^2$

$\underline{x=1-z^2}$

(d) $\vec{r}'(t)=\begin{pmatrix}2\cos t(-\sin t)\\ \cos t\cos t+\sin t(-\sin t)\\ \cos t\end{pmatrix}$ ← Kettenregel ← Produktregel

$t=0 \longrightarrow \vec{r}'(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $t=\pi \longrightarrow \vec{r}'(\pi)=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ Tangentialvektoren in Z für $t=0$ und π

Skalarprodukt: $\underbrace{\vec{r}'(0)}_{\neq\vec{0}}\cdot\underbrace{\vec{r}'(\pi)}_{\neq\vec{0}}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=0+1-1=\underline{\underline{0}}$

$\rightarrow \vec{r}'(0)\perp\vec{r}'(\pi)$

6

(a) $$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{-\frac{1}{2}R}\\ 0\\ h/2\pi\end{pmatrix}\\ -\frac{1}{2}R\\ 0\end{array}\times\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{0}\\ R\\ 0\end{pmatrix}\\ 0\\ R\end{array}=\begin{pmatrix}0-R\cdot h/2\pi\\ 0-0\\ -\frac{1}{2}R\cdot R-0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\pi}Rh\\ 0\\ -\frac{1}{2}R^2\end{pmatrix}}}$$

(b) $$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{t_0R\cos\varphi_0}\\ t_0R\sin\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}\\ t_0R\cos\varphi_0\\ t_0R\sin\varphi_0\end{array}\times\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{-R\sin\varphi_0}\\ R\cos\varphi_0\\ h\end{pmatrix}\\ -R\sin\varphi_0\\ R\cos\varphi_0\end{array}=\begin{pmatrix}t_0R\sin\varphi_0\cdot h-0\\ 0-h\cdot t_0R\cos\varphi_0\\ \underbrace{t_0R^2\cos^2\varphi_0+t_0R^2\sin^2\varphi_0}_{t_0R^2\underbrace{(\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0)}_{=1}}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}t_0R\sin\varphi_0\cdot h\\ -t_0R\cos\varphi_0\cdot h\\ t_0R^2\end{pmatrix}}}$$

(c) $\vec{s}=\begin{pmatrix}-t\cdot\sin\varphi\\ t\cdot\cos\varphi\\ t\end{pmatrix}$, $\vec{t}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ \varphi\end{pmatrix}$,

$$\vec{s}\times\vec{t}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{-t\cdot\sin\varphi}\\ t\cdot\cos\varphi\\ t\end{pmatrix}\\ -t\cdot\sin\varphi\\ t\cdot\cos\varphi\end{array}\times\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{\cos\varphi}\\ \sin\varphi\\ \varphi\end{pmatrix}\\ \cos\varphi\\ \sin\varphi\end{array}=\begin{pmatrix}t\cos\varphi\cdot\varphi-t\sin\varphi\\ t\cos\varphi+\varphi t\sin\varphi\\ \underbrace{-t\sin^2\varphi-t\cos^2\varphi}_{-t(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}\varphi t\cos\varphi-t\sin\varphi\\ \varphi t\sin\varphi+t\cos\varphi\\ -t\end{pmatrix}}}$$

(d) $\vec{s}=\begin{pmatrix}-2\sin\varphi\\ 0\\ 2\cos\varphi\end{pmatrix}$, $\vec{t}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2t\end{pmatrix}$,

$$\vec{s}\times\vec{t}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{-2\sin\varphi}\\ 0\\ 2\cos\varphi\end{pmatrix}\\ -2\sin\varphi\\ 0\end{array}\times\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\cancel{0}\\ 1\\ 2t\end{pmatrix}\\ 0\\ 1\end{array}=\begin{pmatrix}0-2\cos\varphi\\ 0+2t\cdot 2\sin\varphi\\ -2\sin\varphi-0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\cos\varphi\\ 4t\sin\varphi\\ -2\sin\varphi\end{pmatrix}}}$$