Übungsserie 4

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 30. März 2012** in der Vorlesung

1. **Platonische Körper**

   (a) Zeichnen Sie das Schrägbild eines hinreichend grossen **Würfels**. Verbinden Sie 4 der 8 Würfelecken mithilfe von Flächendiagonalen so, dass ein reguläres **Tetraeder** entsteht. Verbinden Sie nun die sechs Kantenmitten des regulären Tetraeders so, dass wiederum ein **Körper** entsteht. Um was für einen Körper handelt es sich?

   (b) In welchem Verhältnis stehen die Kantenlängen der drei Körper zueinander?

   (c) Schneidet man von einem Platonischen Körper die Ecken bis zur Kantenmitte ab (d.h. der Schnitt verläuft durch die Mitten der Kanten, die zur jeweiligen Ecke gehören), entsteht wiederum ein Polyeder (Körperstumpf). Beschreiben Sie die fünf möglichen Polyeder (Anzahl Vielecke von welcher Sorte), die entstehen. Welche dieser Polyeder sind gleich? Bei einem entsteht wiederum ein Platonischer Körper, sonst entstehen Archimedische Körper (Figur 4). Im Gegensatz zu Platon hat Archimedes die nach ihm benannten Körper selber gefunden.

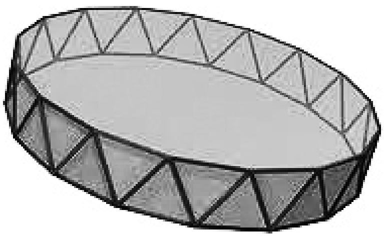
2. Ein **Antiprisma** besitzt als Grund- und Deckfläche zwei kongruente, parallel übereinander liegende, reguläre n-Ecke, welche gegeneinander um $\frac{180°}{n}$ verdreht sind (Figur 1). Die Seitenflächen sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke.

   (a) Skizzieren Sie ein Antiprisma mit quadratischer Grundfläche.

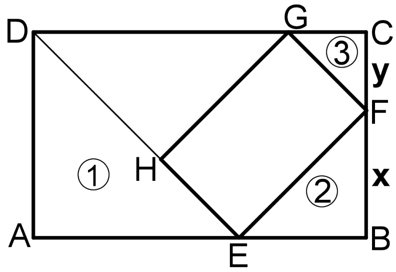
   (b) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen (ausgedrückt mit n) hat ein Antiprisma mit n-eckiger Grundfläche?

   (c) Kann einer der Platonischen Körper als Antiprisma aufgefasst werden? Welcher?

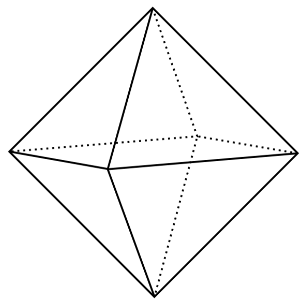
   (d) Gibt es Antiprismen, die nicht konvex sind? Wenn ja, skizzieren Sie ein solches.



Figur 1 (Aufgabe 2)



Figur 2 (Aufgabe 3)



Figur 3 (Aufgabe 4)

3. In Figur 2 ist das **Rechteck** $ABCD$ eine massstäbliche Vergrösserung des Rechtecks $EFGH$. Die Dreiecke ①, ②, ③ sind gleichschenklig! F teilt BC in Abschnitte der Längen x und y. Berechnen Sie das Verhältnis $x : y$. Kommentar zum Verhältniswert?

4. Ein reguläres **Oktaeder** wird durch gleichseitige Dreiecke begrenzt (Figur 3). Verbindet man die Mitten (Schwerpunkte) aller benachbarten Dreiecke, entsteht ein Innenkörper. (Bem: Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie, hier die Seitenflächenhöhe, im Verhältnis 2:1.)

   (a) Skizzieren Sie Oktaeder und Innenkörper. Um was für einen Körper handelt es sich?

   (b) Wie gross ist das Verhältnis der Volumeninhalte vom Innenkörper zum ursprünglichen Oktaeder?

Übungsserie 4

5. (a) Aus einem geraden **Kreiskegel** wird vom Zentrum der Grundkreisfläche her in Richtung Kegelspitze ein zylinderförmiges Loch herausgebohrt, so dass ein Kegelstumpf mit Loch (Hohlkörper) entsteht. Welchen Bruchteil des Volumens des ursprünglichen Kegels besitzt der entstandene Hohlkörper, wenn die Lochgrösse ein Viertel der Grundkreisfläche ausmacht?

   (b) Der **Mensch** (75 kg) nimmt täglich etwa den fünfzigsten Teil seines Eigengewichts an Nahrung zu sich. Die tägliche Nahrung benötigen wir, um unsere Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Angenommen, die Nahrung liefere gerade so viel Energie, um die durch die Körperoberfläche freigesetzte Wärme wieder auszugleichen. (i) Den wievielten Teil seines Eigengewichts muss dann ein massstäblich um den Faktor 8 vergrösserter Mensch zu sich nehmen? (ii) Eine Vergrösserung des Eigengewichts um den Faktor k bedeutet eine Vergrösserung der Nahrungsaufnahme um den Faktor k^p. Wie gross ist p?

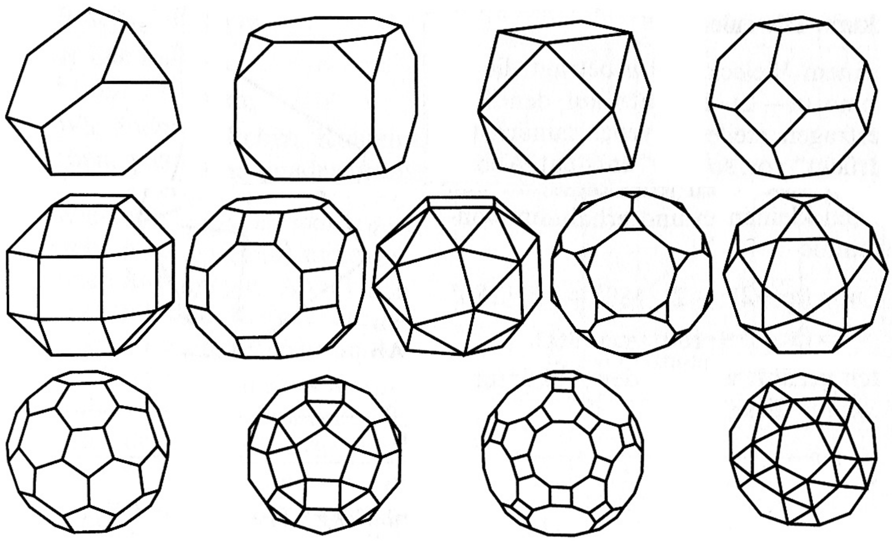
6. Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter gleichseitigen Dreiecken **und** regulären Sechsecken aufgebaut sind und nur n-kantige Ecken (d.h. in jeder Ecke stossen n Kanten zusammen) besitzen.

   (a) Skizzieren Sie einen solchen Körper bestehend aus 2 Sechsecken und 12 Dreiecken.

   (b) Begründen Sie durch Betrachten der möglichen Eckfiguren, dass $n \geq 5$ bei solchen Körpern nicht möglich ist.

   (c) Wie viele Dreiecke enthält ein solcher Körper für $n = 3$ und welche Aussage ist dann über die Anzahl Sechsecke möglich?

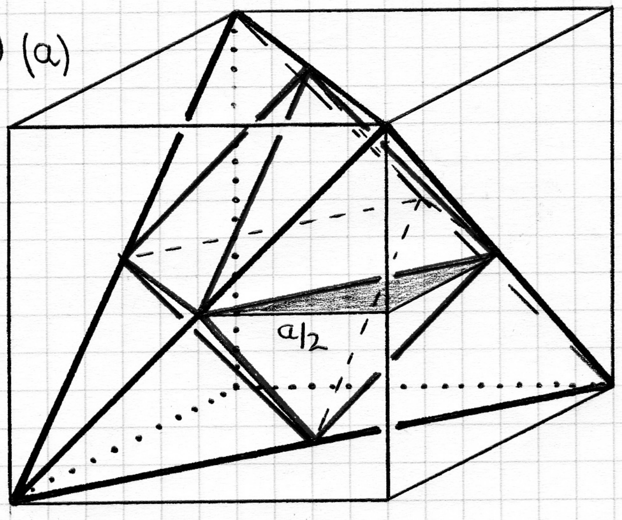
   (d) Bestimmen Sie für $n = 4$ mithilfe der Eulerschen Polyederformel eine Bedingung über die Anzahl Drei- und Sechsecke eines solchen Körpers.



Figur 4 (Die 13 Archimedischen Körper)

Übungsserie 4 FS 2012 Seite 1

1 (a)



Würfel – Tetraeder – Oktaeder (reguläres)

(b) Kantenlängen: Würfel $K_W = a$

Tetraeder: $k_T = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$

Oktaeder: $k_O = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(=\frac{1}{2}k_T\right)$

$(1 : \sqrt{2} : 1/\sqrt{2})$

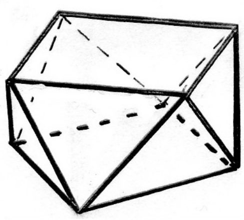
(c) Tetraederstumpf: reg. Oktaeder (Vgl. (a))

Würfelstumpf: 8 reg. Δ, 6 □ (Figur 2!)] =
Oktaederstumpf: " " "

Dodekaederstumpf: 20 reg Δ, 12 reg ⬠] =
Ikosaederstumpf: " "

---

2 (a)



(b) Anzahl

Ecken $e = 2n$

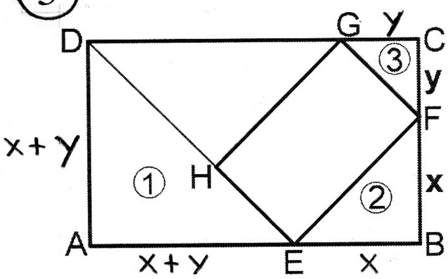
Kanten $k = 2n + 2n = 4n$

Flächen $f = 2 + 2n$

(c) Das reguläre Oktaeder ist ein Antiprisma mit dreieckiger Grundfläche.

(d) Alle Antiprismen sind konvex

3



$|GF| = \sqrt{y^2+y^2} = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}\,y \xrightarrow{\cdot\lambda} |BC| = x+y$ (massstäbl. Vergrösserung)

$|EF| = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x \longrightarrow |AB| = x+y+x$

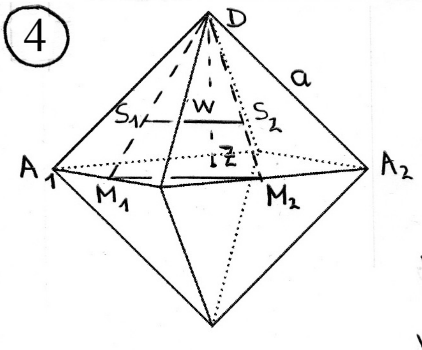
$\lambda = \frac{x+y}{\sqrt{2}\,y} = \frac{x+y+x}{\sqrt{2}\,x} \leftrightarrow x^2+xy = xy+y^2+xy \;\|-2xy-y^2$

$x^2-xy-y^2 = 0 \;\| : y^2$

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ Setze $\tau = \frac{x}{y}$ (oder $y=1$): $\tau^2-\tau-1=0 \rightsquigarrow \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

Kommentar: Verhältnis des GS!

4



(a) Würfel (Figur 2.9, Skript S.55)

(b) $|M_1M_2| = \frac{1}{2}|A_1A_2| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$

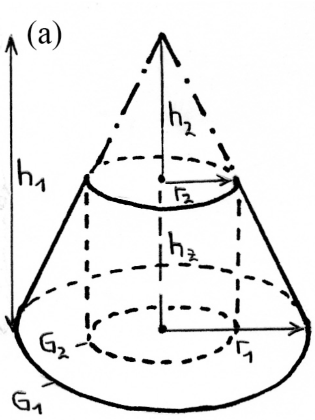
$w = |S_1S_2| = \frac{2}{3}|M_1M_2| = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$ (ΔDS_1S_2 ist eine massstäbl. Verkl. des ΔDM_1M_2 mit Faktor $2/3$)

Volumen Würfel: $w^3 = \left(\frac{\sqrt{2}\,a}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}\,a^3}{27}$

Volumen Oktaeder: $2V_{Pyram.} = 2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot|ZD| = 2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{3}$

Volumenverhältnis: $\frac{2\sqrt{2}}{27}a^3 \Big/ \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$

5 (a)



Der ganze Kegel (V_1) ist eine massstäbliche Vergrösserung des oberen Teilkegels (V_2).

$\frac{G_2}{G_1} = \frac{1}{4}$ (Flächenfaktor) $\rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2}$ Längenfaktor: $r_2 = \frac{1}{2} r_1$

$h_2 = \frac{1}{2} h_1, \; h_Z = \frac{1}{2} h_1$

$V_1 = \frac{1}{3} G_1 h_1 = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1, \quad V_2 = \frac{1}{3} G_2 h_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} G_1 \cdot \frac{1}{2} h_1 = \frac{1}{8} V_1$

$V_Z = G_2 \cdot h_Z = \frac{1}{4} G_1 \cdot \frac{1}{2} h_1 = \frac{1}{8} G_1 h_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} G_1 h_1 = \frac{3}{8} V_1$

$V_{\text{Hohlkörper}} = V_1 - V_2 - V_Z = V_1 - \frac{1}{8} V_1 - \frac{3}{8} V_1 = \frac{4}{8} V_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} V_1}}$

(b) Mensch: $m_1 = 75$ kg Längenfaktor $\lambda = 8$ Riese: $m_2 = \lambda^3 m_1 = 38400$ kg

Oberfl. O_1 Oberflächenfaktor λ^2 $O_2 = \lambda^2 O_1 = 64 O_1$

Nahrung $n_1 = \frac{1}{50} m_1 = 1.5$ kg Massen-/Vol. faktor λ^3 n_2

(i)

Ann.: n prop O bzw. $\frac{n_1}{O_1} = \text{konst} = \frac{n_2}{O_2} \rightsquigarrow n_2 = n_1 \cdot \frac{O_2}{O_1} = 1.5\text{kg} \cdot \frac{64 O_1}{O_1} = 96$ kg

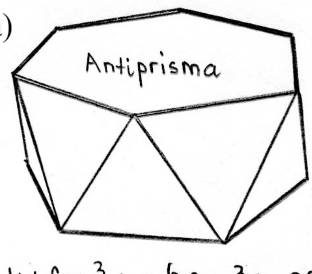
$\frac{m_2}{n_2} = \frac{38'400 \text{ kg}}{96 \text{kg}} = 400 \rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{400}}} \left(= \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{8} \right)$

(ii) $\frac{m_2}{m_1} = \lambda^3 \overset{\text{soll}}{=} k, \quad \lambda = \sqrt[3]{k}, \quad \frac{n_2}{n_1} \overset{\text{Ann}}{=} \frac{O_2}{O_1} = \lambda^2 = (\sqrt[3]{k})^2 = k^{2/3}$, Potenz mit $\underline{\underline{p = 2/3}}$

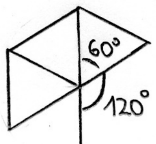
(Empirisch findet man $p = 0.74$ Vgl. E. Schwaiger: Grössenord. in der Natur, S. 34)

6

(a)



(b)



Eine Eckfigur besteht aus mind. 1 6-Eck (120°)
Dann sind maximal 3 Dreiecke (60°) möglich.
Dies gibt maximal 4 Kanten.
(1 Sechseck und 4 Dreiecke sind flach $\rightsquigarrow$ 360°)

(c) f_3, f_6 : Anzahl 3- bzw. 6-Ecke

① $n \cdot e = 2k$ (In jeder Ecke stossen n Kanten zus. jede wird dabei doppelt gezählt)

② $3 f_3 + 6 f_6 = 2k$ (Jedes 3-Eck hat 3 Kanten, jedes 6-Eck 6, wiederum doppelt gezählt)

③ $f_3 + f_4 = f$

$\rightarrow 2 = e - k + f = \frac{2}{n} k - k + f = \frac{3}{n} f_3 + \frac{6}{n} f_6 - \frac{3}{2} f_3 - 3 f_6 + f_3 + f_6$

$2 = \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2} \right) f_3 + \left(\frac{6}{n} - 2 \right) f_6$

$2 \underset{\uparrow\, n=3}{=} \frac{1}{2} f_3$ d.h. $\underline{\underline{f_3 = 4}}$, f_6 $\underline{\underline{\text{keine}}}$ Aussage

(Bsp. Tetraederstumpf $f_3 = f_6 = 4$)

(d) $2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) f_3 + \left(\frac{6}{4} - 2 \right) f_6 \quad \leftrightarrow \quad \underline{\underline{2 = \frac{1}{4} f_3 - \frac{1}{2} f_6}}$ (Bsp. $f_3 = 12, f_6 = 2$ vgl. (b))