ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Sommer 2009
Dozent
Dr. M. Leupp

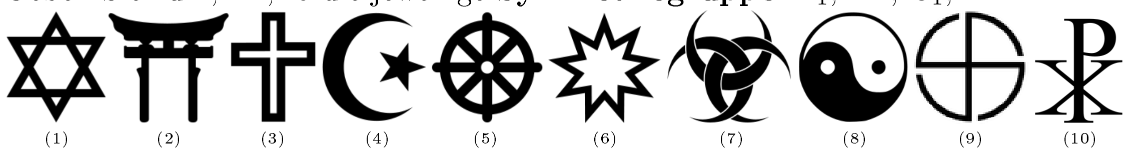
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

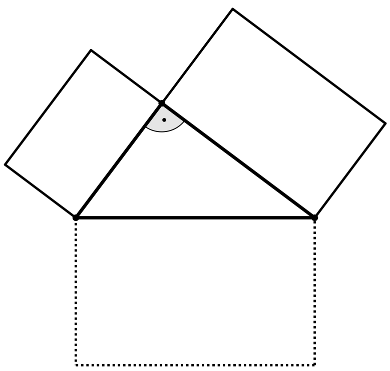
   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.



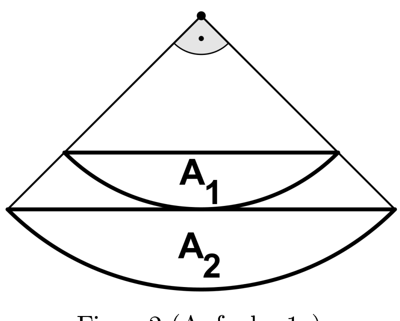
   (b) Über den Katheten eines **rechtwinkligen Dreiecks** werden wie abgebildet die entsprechenden **Goldenen Rechtecke** errichtet (Figur 1). Die beiden Kathetenrechtecke sind zusammengenommen flächengleich mit dem Rechteck, welches über der Hypotenuse errichtet wird. Bestimmen Sie durch Rechnung das Verhältnis von Länge zu Breite des Hypotenusenrechtecks. Um was für ein Verhältnis handelt es sich dabei?

   (c) Figur 2 zeigt zwei **Kreissegmente**. Das Kreissegment A_1 ist eine massstäbliche Verkleinerung des Kreissegments A_2. In welchem Verhältnis stehen deren Flächeninhalte? Rotiert Figur 2 um ihre Symmetrieachse, erzeugen A_1 und A_2 „Kugelschalen". In welchem Verhältnis stehen deren Volumeninhalte?

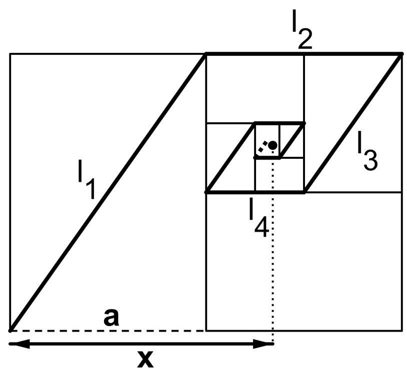
   (d) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung des **Kreises** k mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, der in der (x, z)-Ebene liegt, und eine Parameterdarstellung der Parabel p mit der Gleichung $z = y^2$, die in der (y, z)-Ebene liegt. Der Kreis k wird nun so **verschoben**, dass sein Mittelpunkt stets auf p liegt und seine Kreisebene parallel zur (x, z)-Ebene bleibt; dabei überstreicht er eine Fläche S. Skizzieren Sie S in einem räumlichen Koordinatensystem und finden Sie eine Parameterdarstellung von S.



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1c)



Figur 3 (Aufgabe 2)

2. [8P.] Die **DIN-A Formate** entstehen auseinander durch fortgesetztes Halbieren und haben alle das Verhältnis *Länge* : *Breite* $= \sqrt{2} : 1$. Sie sind damit alle massstäbliche Verkleinerungen voneinander. Figur 3 zeigt eine Folge von solchen DIN-A Formaten: l_1 ist eine Diagonale in einem DIN-A1 Rechteck, l_2 die Länge in einem DIN-A2 Rechteck, l_3 wiederum eine Diagonale in einem DIN-A3 Rechteck usw. ad infinitum.

   (a) Berechnen Sie die Gesamtlänge $L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots$ der „**Spirale**" (ausgedrückt durch a) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit". (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)

   (b) Bestimmen Sie die „Lage" des Zentrums, d.h. den Abstand x (ausgedrückt durch a).

3. [11P.] Die Menge der **Symmetrietransformationen** einer ebenen Figur Ω sei gegeben durch $\mathrm{Symm}(\Omega) = \{I, T, U, V, W, X, Y, Z\}$. (Falls Sie (a) nicht lösen können, wählen Sie für $\mathrm{Symm}(\Omega)$ irgendeine achtelementige Symmetriegruppe und lösen (b) - (d). Heben Sie dabei Ihre Wahl farbig hervor.)

   (a) Übertragen Sie die Tafel (Figur 4) in Ihre Unterlagen und ergänzen Sie sie, sodass eine Gruppe entsteht. (Felder mit der *gleichen* Nummer enthalten den gleichen Eintrag.)
   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_1, die die obige Symmetriegruppe besitzt. Führen Sie dann geeignete Bezeichnungen ein und geben Sie *eine* mögliche 'Lösung' für $T, \ldots, Z$ an.
   (c) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_2, deren Symmetriegruppe gleich viele Elemente wie $\mathrm{Symm}(\Omega_1)$ besitzt, die jedoch nicht die gleiche Symmetrie hat.
   d) Zählen Sie alle möglichen Gruppen (exkl. $\mathrm{Symm}(\Omega)$) auf, die sich durch Kombination von Elementen aus $\mathrm{Symm}(\Omega)$ bilden lassen. Skizzieren Sie zu jeder Gruppe eine ebene Figur, welche diese Symmetriegruppe besitzt.

4. [11P.] Auf die Flächen eines Würfels der Kantenlänge a werden regelmässige Pyramiden aufgesetzt, so dass ein Polyeder entsteht, welches durch lauter Rhomben begrenzt wird, das **Rhombendodekaeder** (Figur 5). (Ein Rhombus (Raute) ist ein gleichseitiges Parallelogramm.)

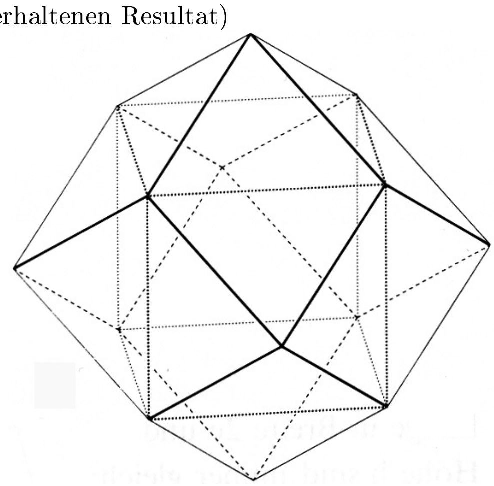
   (a) Begründen Sie, dass die Höhe h der aufgesetzten Pyramiden $\frac{a}{2}$ betragen muss.
   (b) Wie gross sind Volumen und Oberfläche des Rhombendodekaeders (ausgedrückt durch a)?
   (c) Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel für das Rhombendodekaeder. Ist das Rhombendodekaeder kombinatorisch regulär? (Kurze Begründung)
   (d) Die Spitzen aller Pyramiden bilden ein Polyeder P. Welches? Das vorliegende Rhombendodekaeder kann auch aufgefasst werden als das Polyeder P, dem auf allen Seitenflächen Pyramiden der Höhe x aufgesetzt wurden. Berechnen Sie x (ausgedrückt durch a).
   (e) Das Rhombendodekaeder stehe mit einer Ecke ausbalanciert auf der Grundrissebene (Figur 5). Skizzieren Sie die Ansicht von oben (d.h. den Grundriss).

5. [10P.] Eine Gerade g, welche die x-Achse an der Stelle 1 senkrecht unter 45° bezüglich der z-Achse schneidet (vgl. Skript zur Vorlesung S. 42 Figur 1.65) wird an der z-Achse gespiegelt. Verbindet man jeden Punkt A der Geraden g mit dem entsprechenden Spiegelpunkt $\tilde{A}$ der Spiegelgeraden $\tilde{g}$ entsteht durch die Schar dieser Verbindungslinien eine **Fläche** S.

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem g, $\tilde{g}$ sowie die Fläche S mithilfe einiger Verbindungslinien. Wie verlaufen die Verbindungslinien in Bezug zur (x, y)-Ebene?
   (b) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche S mit den Parametern s und t.
   (c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)

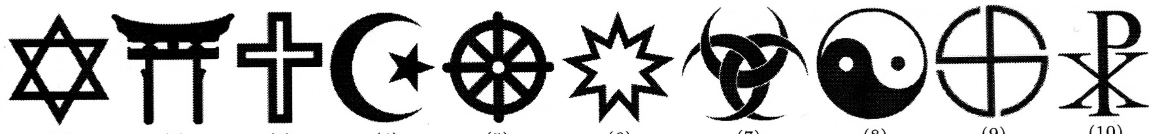
$\circ$	I	T	U	V	W	X	Y	Z
I	I	T	U	V	W	X	Y	Z
T	T	3	2					
U	U	2		X				
V	V	W						U
W	W	4	Y	1	I	T	3	2
X	X	Y	1		5	3	2	W
Y	Y	1		5			W	X
Z	Z		5	U	2		X	

Figur 4 (Aufgabe 3)



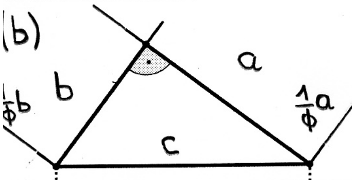
Figur 5 (Aufgabe 4)

1 (a)



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_9$	$\mathbb{C}_3$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_4$	$\mathbb{C}_1$

(b)



$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Gold. Schnitt

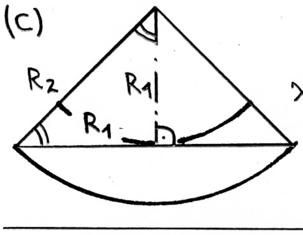
Goldenes Rechteck über a: Länge a, Breite $\frac{1}{\phi}a$, Fläche: $a\cdot\frac{1}{\phi}a = F_a$

" " " b: b $\quad 1/\phi\cdot b \quad$ $b\cdot 1/\phi\, b = F_b$

Fläche Rechteck über c: $F_c = F_a + F_b = \frac{1}{\phi}a^2 + \frac{1}{\phi}b^2 = \frac{1}{\phi}\underbrace{(a^2+b^2)}_{=c^2 \text{ Pythagoras}} = \frac{1}{\phi}c^2 = c\cdot\underbrace{\frac{1}{\phi}c}_{\text{Breite}}$

Verhältnis: $\frac{\text{Länge}}{\text{Breite}} = \frac{c}{1/\phi\cdot c} = \underline{\underline{\phi}}$ Verhältnis des Goldenen Schnitts

(c)



$R_2^2 = R_1^2 + R_1^2 = 2R_1^2$, $R_2 = \sqrt{2}\,R_1$

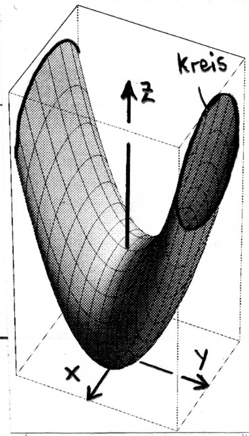
$\lambda = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ Längenfaktor, Flächenfaktor $\lambda^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Volumenfaktor $\lambda^3 = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$

oder: $A_2 = \frac{1}{4}\pi R_2^2 - \frac{1}{2}R_2\cdot R_2$

$A_1 = \frac{1}{4}\pi R_1^2 - \frac{1}{2}R_1\cdot R_1$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_1^2(\ldots)}{R_2^2(\ldots)} = \lambda^2 = \frac{1}{2}$



(d) Kreis K mit Radius 2 und Mittelpt (0,0,0): $\varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 0 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix}$

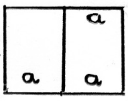
Parameterdarstellung der Parabel: $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{S: (\varphi,t) \longmapsto \vec{r}(\varphi,t) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ t \\ t^2 + 2\sin\varphi \end{pmatrix}}}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < t < \infty$

2

$\ell_1 = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a$



$\ell_2 = a$

$\ell_3 = \frac{1}{2}\ell_1$, $\ell_4 = \frac{1}{2}\ell_2$

$\ell_5 = \frac{1}{2}\ell_3$, $\ell_6 = \frac{1}{2}\ell_4$

Jedes nachfolgende Paar ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden Paars mit $\lambda = \frac{1}{2}$

(a) $L = (\ell_1+\ell_2) + (\ell_3+\ell_4) + (\ell_5+\ell_6) + \ldots$

$= (\ell_1+\ell_2) + \frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2) + \frac{1}{2}(\ell_3+\ell_4) + \ldots$

$L = \sqrt{3}a + a + \frac{1}{2}\underbrace{[\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ldots]}_{L} \quad \| -\frac{1}{2}L$

$\frac{1}{2}L = a(\sqrt{3}+1)$

$\underline{\underline{L = 2a(\sqrt{3}+1)}}$

(b) $x = 2\ell_2 - 2\ell_4 + 2\ell_6 - \ldots = 2a - [2\underbrace{\ell_4}_{\frac{1}{2}\ell_2} - 2\underbrace{\ell_6}_{\frac{1}{2}\ell_4} + \ldots]$

$= 2a - \frac{1}{2}\underbrace{[2\ell_2 - 2\ell_4 + \ldots]}_{x} \quad \| +\frac{1}{2}x$

$\frac{3}{2}x = 2a$, $\underline{\underline{x = \frac{4}{3}a}}$

3 (a)

∘	I	T	U	V	W	X	Y	Z
I	I	T	U	V	W	X	Y	Z
T	T	③U	②V	W	X	Y	Z	
U	U	②V	W	X	Y	Z	I	T
V	V	W	X	Y	Z	I	T	U
W	W	④X	Y	❶Z	I	T	❸U	❷V
X	X	Y	①Z	⑥I	❺T	③U	②V	W
Y	Y	①Z	⑥I	⑤T	U	V	W	X
Z	Z	⑥I	⑤T	U	②V	W	X	⑦Y

❶ Z (in jeder Zeile, Spalte jedes Element genau einmal

❷ V

❸ U

④ X

❺ T

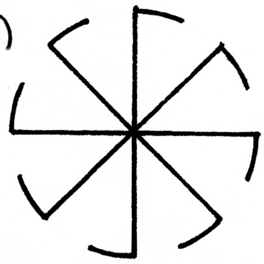
⑥ I

❼ Y

...

$\mathbb{C}_8$

(b)



Ω_1 (Mittelpt M)

$T = R_{M,45°}$

$U = R_{M,90°}$

$V = R_{M,135°}$

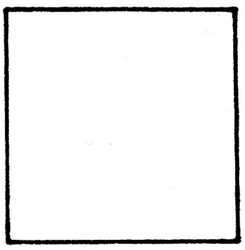
$W = R_{M,180°}$

$X = R_{M,225°}$

$Y = R_{M,270°}$

$Z = R_{M,315°}$

(c) $\mathbb{D}_4$ besitzt auch 8 Elemente, wie $\mathbb{C}_8$



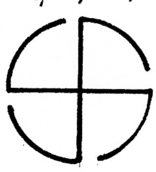
Ω_2 (Quadrat)

(4 Rotationen: 0°, 90°, 180°, 270°

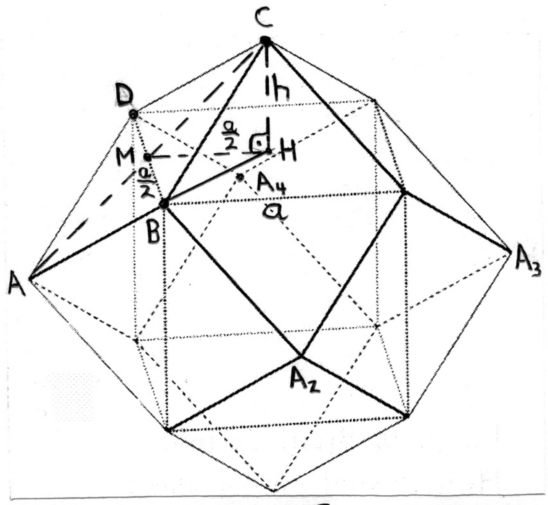
4 Spiegelungen)

(d) $\{I\}$; $\{I, R_{M,180°}\}$; $\{I, R_{M,90°}, R_{M,180°}, R_{M,270°}\}$

F Z



4 (a) DBC und BDA sind gleichschenklige, kongruente Dreiecke. ABCD ist ein <u>ebenes</u> Viereck (Parallelogramm, falls $\sphericalangle(AMC) = 180°$. Dies folgt aus:



$|MH| = \frac{a}{2}$, $|HC| = h = \frac{a}{2}$ $\rightsquigarrow$ ΔHCM gleichschenklig, $\sphericalangle(HMC) = 45°$

$\sphericalangle(AMC) = 45° + 90° + 45° = 180°$

(b) Volumen: $V = V_{\text{Würfel}} + 6V_{\text{Pyr}} = a^3 + 6 \cdot \frac{1}{3} \overbrace{a^2}^{\text{G'fläche}} \cdot \overbrace{\frac{a}{2}}^{\text{Höhe}} = \underline{\underline{2a^3}}$

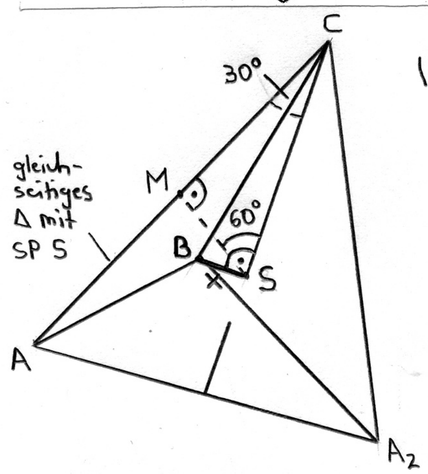
$$|MC| = \sqrt{|MH|^2 + h^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = \sqrt{2}\,\frac{a}{2}$$

Oberfläche: $O = 24\,F_{\Delta DBC} = 24 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{2}\,\frac{a}{2} = \underline{\underline{6\sqrt{2}\,a^2}}$

(c) Anz. Ecken: $e = 14$, Anz. Flächen: $f = 12$, Anz. Kanten: $k = 24$

$e - k + f = 14 - 24 + 12 = 2$ ✓

<u>Nicht</u> komb. regulär. Nicht in jeder Ecke stossen gleichviele Kanten zusammen



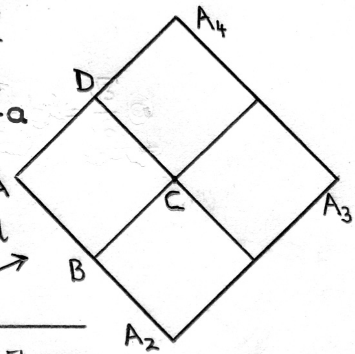
(d) P ist ein <u>reguläres Oktaeder</u>

$|MC| = \sqrt{2}\,\frac{a}{2}$ (vgl. (b)), $|MC| = \underbrace{\sin 60°}_{\sqrt{3}/2} \cdot |SC|$, $|SC| = \frac{2}{\sqrt{3}}|MC| = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2}\,\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

$$|BC| \underset{\text{h } \Delta BCM}{=} \sqrt{|BM|^2 + |MC|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2}{4}} = \sqrt{3\frac{a^2}{4}} = \sqrt{3}\,\frac{a}{2}$$

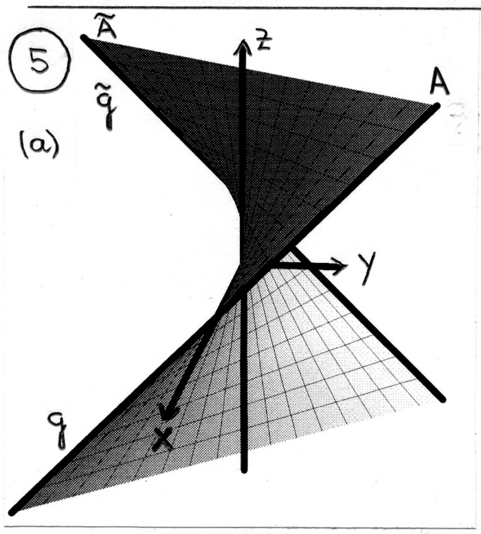
$$x \underset{\text{h } \Delta BSC}{=} \sqrt{|BC|^2 - |SC|^2} = \sqrt{3\frac{a^2}{4} - \frac{2}{3}a^2} = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{12}}_{\frac{3}{36}} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

(e) A, A_2, A_3, A_4 bilden ein Quadrat, welches parallel zur Grundrissebene liegt! ⟶



---

5 (a)



(a) Die Verbindungslinien verlaufen parallel zur (x,y)-Ebene

(b) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Punkt A_t auf Gerade g: $A_t = (1, t, t)$ (Skript S. 42)

Spiegelpunkt $\tilde{A}_t$: $\tilde{A}_t = (-1, -t, t)$, Verbindungsvektor $\overrightarrow{A_t\tilde{A}_t} = \begin{pmatrix}-2\\-2t\\0\end{pmatrix}$

Für einen Flächenpunkt auf der Verbindungslinie $A_t\tilde{A}_t$ gilt:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA_t} + s\overrightarrow{A_t\tilde{A}_t} = \begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-2t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2s\\t-2st\\t\end{pmatrix} \qquad 0 \le s \le 1$$

Fläche S: $(s,t) \longmapsto \vec{r}(s,t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1-2s\\t-2st\\t\end{pmatrix}}}$ $\quad 0 \le s \le 1$ (od. $-\infty < s < \infty$) $\quad -\infty < t < \infty$

(c) S entsteht durch Bewegung eines Geradenstücks (der eine Endpt auf q, der andere auf $\tilde{q}$) ⟶ Schar gerader Linien, S ist Regelfläche

(d) $x = 1 - 2s$, $s = \frac{1-x}{2}$; $y = t - 2st = z - 2 \cdot \frac{1-x}{2} \cdot z = z - (1-x)z = z - z + xz = xz$

$z = t$ $\qquad$ Koord.glch.: $\underline{\underline{y = xz}}$

(e) $\vec{s} = \vec{r}_{t_0}{}'(s_0) = \begin{pmatrix}-2\\-2t_0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{t} = \vec{r}_{s_0}{}'(t_0) = \begin{pmatrix}0\\1-2s_0\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix}-2\\-2t_0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1-2s_0\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2t_0\\2\\-2+4s_0\end{pmatrix}}}$

<u>Nicht</u> abwickelbar! Richtung von $\vec{n}$ ändert entlang horizontaler s-Linie (Verbind. linie)

z.B. s-Linie zu $t = 1$: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-2+4s\end{pmatrix}$ ⟵ ändert!