ETHZ D-ARCH Studiengang Architektur | **Basisprüfung** | Herbst 2008 Dozent Dr. M. Leupp

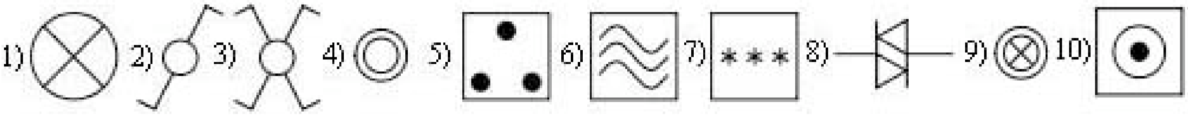
Mathematisches Denken I & II

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

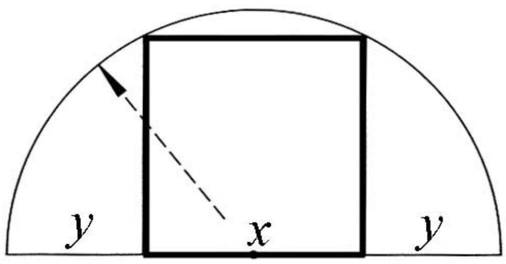
   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.



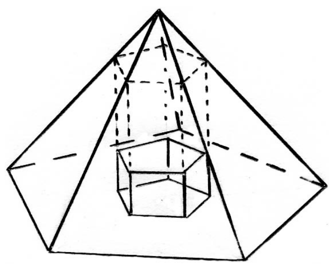
   (b) Auf einem **halbkreisförmigen Grundstück** wird ein Gebäude mit quadratischem Grundriss errichtet (Figur 1). Dieses unterteilt den Durchmesser in Abschnitte der Längen x und y. Berechnen Sie das Verhältnis $x : y$. Kommentar zum Verhältniswert?

   (c) Aus einem **Zylinder** wird ein **Loch** in der Form eines **Kegelstumpfs** herausgebohrt, so dass die obere Lochöffnung ein Achtel der Deckfläche des Zylinders und die untere Lochöffnung die Hälfte der Grundfläche des Zylinders betragen. Welcher Bruchteil des ursprünglichen Zylindervolumens wurde herausgebohrt? (Tipp: Loch zum Kegel ergänzen.)

   (d) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung des **Kreises** k mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, der in der (x, y)-Ebene liegt und eine Parameterdarstellung des **Kreises** κ mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0, 3, 0)$, der in der (y, z)-Ebene liegt. Der Kreis κ wird nun so **verschoben**, dass sein Mittelpunkt stets auf k liegt und seine Kreisebene parallel zur (y, z)-Ebene bleibt; dabei überstreicht er eine Fläche S. Finden Sie eine Parameterdarstellung von S.



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. [7P.] In dieser Aufgabe betrachten wir eine regelmässige, ***n*-seitige Pyramide** (Figur 2). (D.h. die Pyramidengrundfläche ist ein regelmässiges n-Eck auf dessen Achse die Pyramidenspitze liegt.)

   (a) Parallel zu den Seiten der Grundfläche wird entlang der Achse eine Vertiefung in die Pyramide eingelassen. (Grund- und Deckfläche der Vertiefung sind n-Ecke mit gleicher Achse und Ausrichtung wie die Pyramidengrundfläche.) Wie viele Ecken, Kanten, Flächen (ausgedrückt durch n) hat eine solche n-seitige Pyramide mit Vertiefung? Gilt die Eulersche Polyederformel?

   (b) Gilt die Eulersche Polyederformel, wenn die Vertiefung durch den ganzen Körper hindurchgeht? (Anzahl Ecken, Kanten und Flächen (ausgedrückt durch n) angeben.)

3. [10P.] Bezeichne Ω den im Würfel abgebildeten **Winkelflügel** (Figur 3). (Alle Eckpunkte des Winkelflügels sind Ecken, Kanten- oder Flächenmittelpunkte des Würfels.)

   (a) Sei $\mathcal{DS}$ diejenige Symmetrietransformation der räumlichen Figur Ω, welche die Punkte A, B, C, D wie folgt abbildet: $A \xmapsto{\mathcal{DS}} C$, $B \xmapsto{\mathcal{DS}} D$, $C \xmapsto{\mathcal{DS}} B$, $D \xmapsto{\mathcal{DS}} A$. Um was für eine Symmetrietransformation handelt es sich? („Typ“ & bestimmende Elemente angeben/beschreiben)

   (b) Begründen Sie kurz, dass Ω höchstens vier Symmetrietransformationen besitzen kann.

   (c) Ermitteln Sie $\mathrm{Symm}(\Omega)$, d.h. finden Sie alle vier Symmetrietransformationen von Ω. („Typ“ gemäss Liste im Skript auf S. 93 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)

Bitte wenden!

(d) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf.

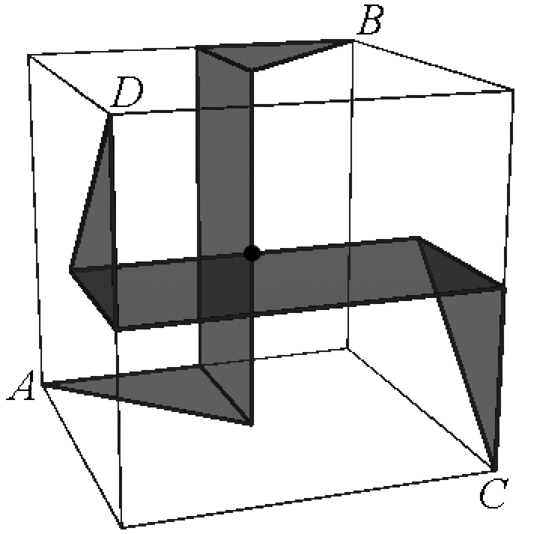
(e) Skizzieren Sie eine ebene Figur $\tilde{\Omega}$, deren Symmetriegruppe gleich viele Elemente wie Symm(Ω) besitzt und deren Gruppentafel die *gleiche Struktur* aufweist. (D.h. jedes Element von Symm(Ω) entspricht einem Element von Symm($\tilde{\Omega}$) und bezüglich diesen Entsprechungen sind die beiden Gruppentafeln identisch.) Geben Sie ferner die zugehörigen Entsprechungen an.

4. [12P.] Wir betrachten in dieser Aufgabe eine **gerade, quadratische Doppelpyramide** und ihre **Inkugel** (Figur 4): Die Pyramidenspitzen S und T liegen senkrecht im Abstand $h = \sqrt{2}\,a$ über/unter der Mitte M des Quadrates $ABCD$, welches die Seitenlänge a besitzt.
   (a) Zeichnen Sie den „Querschnitt“, der entsteht, wenn Doppelpyramide *und* Inkugel
      (a1) von der Ebene durch S, T und die Kantenmitten von AD, BC geschnitten werden.
      (a2) von der Ebene durch A, B, C und D geschnitten werden.
      (a3) von der Ebene durch A, T, C und S geschnitten werden.
   (b) Berechnen Sie das Volumen & die Oberfläche der Doppelpyramide (ausgedrückt durch a).
   (c) Berechnen Sie den Radius r der Inkugel und zeigen Sie, dass gilt $r = \frac{1}{3}|AC| = \frac{2}{3}|AM|$. (Falls Sie (c) nicht lösen können, rechnen Sie mit $r = \frac{2}{3}|AM|$ weiter.)
   (d) In den vier Ecken A, B, C, D werden Eckpyramiden abgeschnitten, deren Grundflächen die Inkugel berühren und vier gleich lange Seiten aufweisen. Skizzieren Sie die Grundfläche einer solchen abgeschnittenen Eckpyramide. (Längen der beiden Diagonalen berechnen!)
   (e) Wie gross ist das Volumenverhältnis von abgeschnittener und ursprünglicher Doppelpyramide?

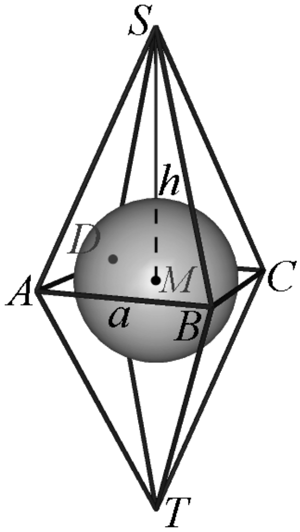
5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} (2-2t)\cos\varphi \\ (1-t)\sin\varphi \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 2)$$

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t = 0$ und $t = 2$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)
   (b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien?
   (c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r_0} := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat oder ohne Rechnung)

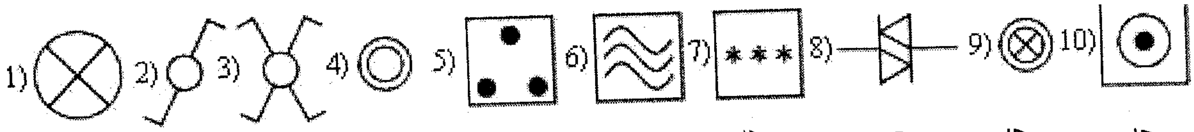


Figur 3 (Aufgabe 3)



Figur 4 (Aufgabe 4)

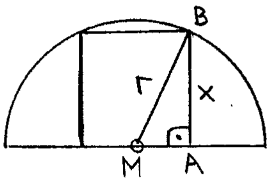
① (a)



1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_\infty$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_4$

(b) Pythagoras im ⊡-MAB: $r^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2$ mit $r = \frac{x}{2} + y$

(oder Höhensatz (Halbkreis = Thales...) $(y+x)\cdot y = x^2$)



$$\cancel{\left(\tfrac{x}{2}\right)^2} + 2\frac{x}{2}y + y^2 = \cancel{\left(\tfrac{x}{2}\right)^2} + x^2$$

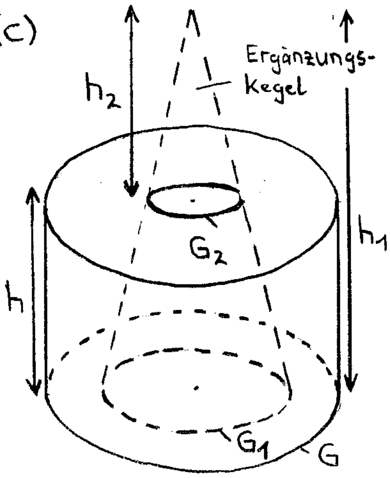
$$0 = x^2 - xy - y^2 \quad \| : y^2$$

$$0 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1$$

Kommentar: Verhältnis des GS!

Setze $\lambda = \frac{x}{y}$ (oder $y = 1$): $0 = \lambda^2 - \lambda - 1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \ \text{↯}\right)$

(c)



Der ganze Kegel ist eine massstäbliche Vergrösserung des Ergänzungskegels.

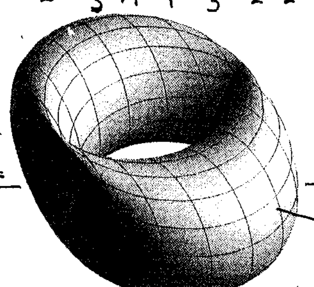
$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\frac{1}{2}G}{\frac{1}{8}G} = 4$ ("Flächenfaktor") $\rightsquigarrow \lambda = 2$ Längenfaktor: $\overbrace{h+h_2}^{h_1} = 2h_2$, $\underline{h = h_2}$

$$V_1 = \lambda^3 V_2 = 8V_2 \rightsquigarrow V_{Loch} = V_1 - V_2 = 7V_2 = 7\cdot\frac{1}{3}G_2\cdot h_2 = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{8}G\cdot h$$

(oder: $V_{Loch} = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}G_1h_1 - \frac{1}{3}G_2h_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2}G\cdot 2h - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}G\cdot h = \frac{7}{24}G\cdot h$)

$V_{Zyl} = G\cdot h$

$$\rightsquigarrow \frac{V_{Loch}}{V_{Zyl}} = \underline{\underline{\frac{7}{24}}}$$



(d) Kreis k mit Radius 3 und Mittelpt (0,0,0): $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Kreis K mit Radius 2 und Mittelpt (0,3,0): $t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cos t + 3 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$

$$S: (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi + 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

$(0 \leq \varphi, t \leq 2\pi)$

---

② (a)

		Grundfl.		Vertiefung		zur Spitze	
Anzahl Ecken	$e =$	n	+	$2n$	+	1	$= 3n+1$
Anzahl Kanten	$k =$	n	+	$3n$	+	n	$= 5n$
Anzahl Flächen	$f =$	1	+	$n+1$	+	n	$= 2n+2$

Eulersche Formel: $e - k + f = 3n+1 - 5n + 2n + 2 = 3$ (stimmt nicht)

(b)

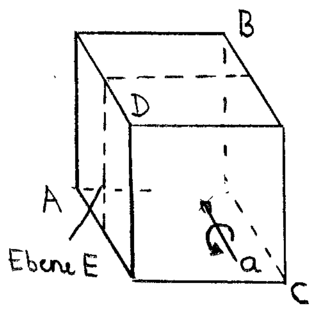
Anzahl Ecken	$e =$	n	+	$2n$	+	0	$= 3n$
	$k =$	n	+	$3n$	+	n	$= 5n$
	$f =$	1	+	n	+	n	$= 2n+1$

$e - k + f = 3n - 5n + 2n + 1 = 1$ (stimmt nicht)

---

③ (a)

Drehspiegelung mit Drehachse a (Drehwinkel 90°) und Spiegelungsebene E



(b) A kann durch eine Symmetrietrsf. des Winkelflügels höchstens nach A, B, C, D (4 Mögl.keiten) abgebildet werden. Das Bild von B (gleicher Flügelteil wie A) ist dann eindeutig festgelegt (1 Mögl.keit) $\rightsquigarrow 4\cdot 1 = \underline{\underline{4 \text{ Mögl.}}}$

(c) I Identität, R (Rotation um Achse a um 180°), DS_2

I		R		DS_2	
$A \mapsto A$	$C \mapsto C$	$A \mapsto B$	$C \mapsto D$	$A \mapsto D$	$C \mapsto A$
$B \mapsto B$	$D \mapsto D$	$B \mapsto A$	$D \mapsto C$	$B \mapsto C$	$D \mapsto B$

DS_1 (Drehspiegelung aus (a)), DS_2 (Drehspiegelung mit Achse a, Drehwinkel 270°) und Spiegelungsebene E.

(d)

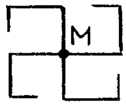
$\circ$	I	R	DS_1	DS_2
I	I	R	DS_1	DS_2
R	R	I	DS_2	DS_1
DS_1	DS_1	DS_2	R	I
DS_2	DS_2	DS_1	I	R

denn
$$\begin{array}{l} A \overset{DS_1}{\longmapsto} C \overset{R}{\longmapsto} D \\ B \longmapsto D \longmapsto C \\ C \longmapsto B \longmapsto A \\ D \longmapsto A \longmapsto B \end{array}$$

$R \circ DS_1 = DS_2$, usw.

(e) $\mathbb{D}_2$ nicht, da für jedes Element S gilt: $S \circ S = I$

also $\mathbb{C}_4$:

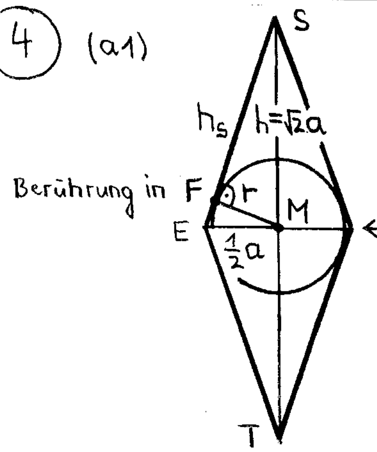


$I \,\hat{=}\, I$, $R \,\hat{=}\, R_{M,180°}$, $DS_1 \,\hat{=}\, R_{M,90°}$, $DS_2 \,\hat{=}\, R_{M,270°}$

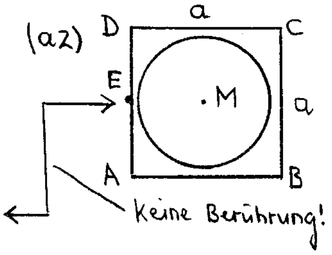
(oder $I \,\hat{=}\, I$, $R \,\hat{=}\, R_{M,180°}$, $DS_1 \,\hat{=}\, R_{M,270°}$, $DS_2 \,\hat{=}\, R_{M,90°}$)

---

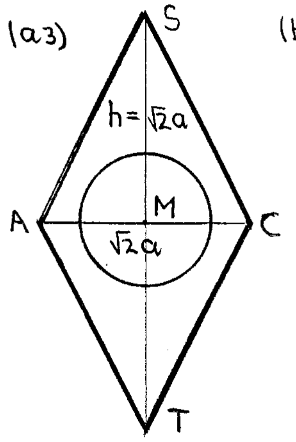
(4) (a1)



(a2)



(a3)



(b) $V = 2 \cdot \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{2}{3} a^2 \cdot \sqrt{2} a = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{3} a^3}}$

Seitenflächenhöhe h_S: (im $\triangle$ EMS)

$h_S^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2a^2 = \frac{9}{4}a^2$

$h_S = \frac{3}{2}a$

$O = 8 \cdot F_\Delta = 8 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s = 8 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{3}{2} a$

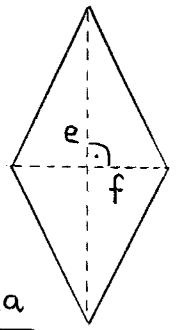
$= \underline{\underline{6a^2}}$

(c) In (a1) gilt: $\triangle$-ΔFMS ist eine massstäbliche Verkleinerung des $\triangle$-ΔMES $\rightsquigarrow \frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{h}{h_S} = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{3}{2}a}$, $\underline{\underline{r = \frac{1}{3}\sqrt{2}a}}$

(oder: Im $\triangle$-ΔEMS $\sin\alpha = \frac{h}{h_S} = \frac{\sqrt{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{3}2\sqrt{2}$, im $\triangle$-ΔEMF $r = \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}\sqrt{2}a$)

$|AC| = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a \rightsquigarrow r = \frac{1}{3}|AC| = \underline{\underline{\frac{2}{3}|AM|}}$, da $|AC| = 2|AM|$

(d) (Alle 4 Eckpyramiden sind kongruent!) Grundfläche der Eckpyramide mit Spitze A ist eine massstäbliche Verkleinerung des Rhombus TBSB.



Der Skalenfaktor (Längenfaktor) ist $\lambda = \frac{|AM| - r}{|AM|} = \underline{\frac{1}{3}}$ (vgl. (c))

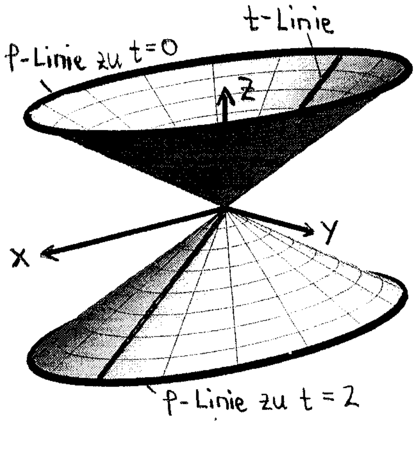
Länge der Rhombendiagonalen: $e = \frac{1}{3}|ST| = \frac{1}{3}2h = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{2}a}}$ $\quad f = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}|AC| = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{2}a}}$

(e) Eine abgeschnittene Eckpyramide ist eine massstäbliche Verkleinerung der halben ursprünglichen Doppelpyramide, z.B. Eckpyramide bei A ist Verkleinerung von TBSDA.

Volumenfaktor: $\lambda^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, $V_{Eck} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} V_{Doppel}$, $V_{Rest} = V_{Doppel} - 4V_{Eck} \overbrace{=}^{1-\frac{2}{27}=\frac{25}{27}} \underline{\underline{\frac{25}{27} V_{Doppel}}}$

---

(5) Ellipsen-Doppelkegel



(a) p-Linie zu $t=0$ bzw. $t=2$: Ellipse mit Mittelpt auf z-Achse bei (0,0,1) bzw (0,0,−1) parallel zur (x,y)-Ebene mit Halbachsen 2 und 1

(b) t-Linien sind Geradenstücke durch (0,0,0) verlaufend

(c) S entsteht durch Bewegung einer Geraden (z.B. beginnend bei oberer Ellipse, durch (0,0,0) bis zur punktgespiegelten Ellipse) → Schar gerader Linien

S ist Regelfläche (verallg. Kegelfläche)

(d)
$$\left.\begin{array}{l} x = (2-2t)\cos p \rightsquigarrow \cos p = \frac{x}{2-2t} = \frac{x}{2(1-t)} = \frac{x}{2z} \\ y = (1-t)\sin p \rightsquigarrow \sin p = \frac{y}{1-t} = \frac{y}{z} \\ z = 1-t \end{array}\right\}$$

Idee: $\cos^2 p + \sin^2 p = 1$

$\frac{x^2}{4z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$

$\underline{\underline{\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2}}$

(e) $\vec{s} = \vec{r}_{t_0}'(p_0) = \begin{pmatrix} -(2-2t_0)\sin p_0 \\ (1-t_0)\cos p_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \vec{r}_{p_0}(t_0) = \begin{pmatrix} -2\cos p_0 \\ -\sin p_0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -(2-2t_0)\sin p_0 \\ (1-t_0)\cos p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\cos p_0 \\ -\sin p_0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1-t_0)\cos p_0 \\ -(2-2t_0)\sin p_0 \\ (2-2t_0)\sin^2 p_0 + \underbrace{2(1-t_0)}_{(2-2t_0)}\cos^2 p_0 \end{pmatrix} \underset{\text{"}\sin^2+\cos^2=1\text{"}}{=} \underbrace{(1-t_0)}_{\text{Länge}} \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos p_0 \\ -2\sin p_0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Richtung}} \quad (t_0 \neq 1)$$

Länge von $\vec{n}$ variiert, aber Richtung von $\vec{n}$ ist konstant entlang t-Linie → abwickelbar

oder: S ist verallg. Kegelfläche und deshalb abwickelbar