ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Sommer 2010
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

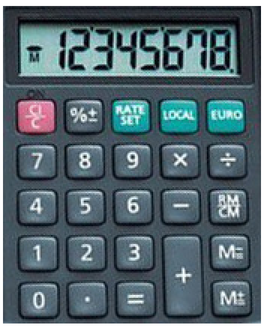
1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Ältere Displays stellen Ziffern wie in Figur 1 gezeigt dar. Geben Sie zu jeder der 10 Ziffern $0, \dots, 9$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{C}_1, \dots$ an. Bilden Sie ferner eine dreistellige Zahl (aus lauter verschiedenen Ziffern) die $\mathbb{C}_2$ als Symmetriegruppe besitzt.

   (b) Figur 2 zeigt in der *Ansicht von oben* ein reg. Dodekaeder, das ausbalanciert mit einer Ecke auf dem Boden steht. Skizzieren Sie ebenso einen **Würfel**, ein reguläres **Tetra-**, **Okta-** und **Ikosaeder**. (Achten Sie in Ihren Skizzen auf korrekte Winkel & Proportionen.)

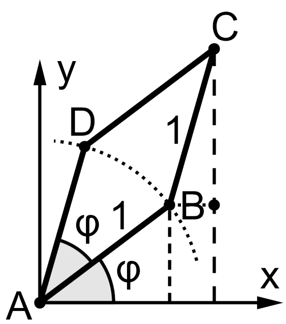
   (c) Verbindet man (rundherum) alle Seitenmitten eines regulären n-**Ecks** entsteht wiederum ein reguläres n-Eck. In welchem Verhältnis stehen deren Flächeninhalte im Falle $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$?

   (d) Ein **Gelenk-Rhombus** $ABCD$ (Seitenlänge 1) wird so um den Ursprung $O = A$ bewegt, dass der Punkt D doppelt so schnell ist wie der Punkt B (Figur 3), d.h. $\sphericalangle(x\text{-Achse}, AB) = \sphericalangle(AB, AD) = \varphi$. Dabei bewegt sich C um A herum. Skizzieren Sie mit Einheit 4 cm die Position des mitbewegten Punktes C für die folgenden Winkel φ: 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180° und skizzieren Sie die Bahnkurve. Wie lautet eine Parameterdarstellung dieser Bahnkurve? (Bestimmen Sie dazu die Koordinaten x und y von C als Funktionen von φ.)

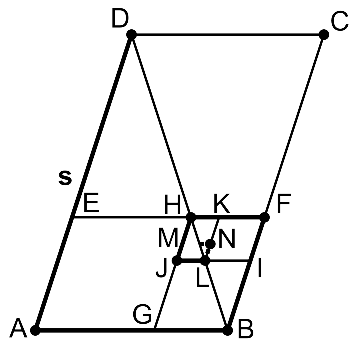


Figur 1 (Aufgabe 1a)

Figur 2 (Aufgabe 1b)



Figur 3 (Aufgabe 1d)



Figur 4 (Aufgabe 2)

2. [7P.] Das **Goldene Dreieck** ABD mit Schenkellänge s wird durch ein gleiches Goldenes Dreieck CDB zum **Parallelogramm** $ABCD$ ergänzt (Figur 4). Schneidet man vom Parallelogramm $ABCD$ den Rhombus $CDEF$ ab, entsteht das Parallelogramm $ABFE$, von welchem wiederum ein Rhombus abgeschnitten wird und so weiter ad infinitum.

   (a) Begründen Sie, dass für die Seiten beim Parallelogramm $ABFE$ gilt: $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \; (= \phi)$

   (b) Berechnen Sie die Länge L der fett ausgezogenen 'Spirale' $DABFHJLN\dots$ (ausgedrückt durch s) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit". (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)

   (c) Beschreiben Sie die Lage des Zentrums der 'Spirale' und begründen Sie Ihre Antwort.

3. [10P.] Von einer ebenen Figur Ω ist bekannt, dass sie die **Symmetriegruppe** $\text{Symm}(\Omega) = \{I, V, W, X, Y, Z\}$ besitzt und dass $\{I, V, W\}$ eine **Untergruppe** bildet (d.h. I, V, W bilden ihrerseits eine Gruppe in $\text{Symm}(\Omega)$).

   (a) Übertragen Sie die Tafel (Figur5) in Ihre Unterlagen und vervollständigen Sie sie, sodass gilt: ① $= Y$, ② $= I$ und dass $\text{Symm}(\Omega)$ kommutativ (also symmetrisch zur Hauptdiagonalen) ist. (Tipp für das 'letzte Viertel' der Tafel: $X \circ X = X \circ (Z \circ V) = (X \circ Z) \circ V = \ldots \circ V = \ldots$)
   (b) Skizzieren Sie eine ebene Figur Ω_1, die die Symmetriegruppe $\text{Symm}(\Omega)$ besitzt und eine Figur Ω_2, die die Symmetriegruppe $\{I, V, W\}$ besitzt.
   (c) $\text{Symm}(\Omega)$ hat auch eine zweielementige Untergruppe. Welche 2 Elemente umfasst sie?
   (d) Sind die Forderungen in (a) wirklich nötig, oder könnte sich sonst auch eine (echt) andere Symmetriegruppe ergeben? (Beschreiben Sie die Gruppe oder begründen Sie Ihr „Nein".)

4. [12P.] Figur 6 zeigt einen **Würfelstumpf**, welcher aus lauter regelmässigen Dreiecken und Vierecken der Seitenlänge $a = 1$ aufgebaut ist.

   (a) Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel für den Würfelstumpf.
   (b) Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Achten Sie auf korrekte Winkel & Streckenverhältnisse.) Wie gross ist die Kantenlänge w des umgebenden Würfels?
   (c) Der Würfelstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.
   (d) Jede Dreieckfläche bildet zusammen mit der nächstgelegenen Würfelecke ein Polyeder (dessen Körperhöhe (Formel im Skript!) auf der Raumdiagonalen des Würfels liegt). Was für eines? Ermitteln Sie den Abstand paralleler Dreieckflächen des Würfelstumpfs.
   (e) Werden die Dreieckflächen des Würfelstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen weiteren Körper, der den Würfelstumpf enthält. Welcher Körper ist das?

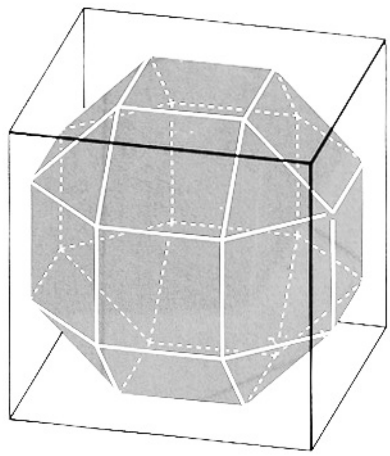
5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} 2t\cos\varphi \\ t \\ 2t\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -1.5 \le t \le 1.5)$$

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t = -1$, $t = 1$, $t = 0$ (Sonderfall). Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)
   (b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien?
   (c) Ist S eine Regelfläche? Ist S abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnungen)
   (d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (e) Skizzieren oder beschreiben Sie diejenige Kurve γ auf der Fläche S, für die $t = \varphi$ gilt ($-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \approx 1.5$) Berechnen Sie den Richtungsvektor, unter welchem γ durch den Ursprung $(0, 0, 0)$ geht.

$\circ$	I	V	W	X	Y	Z
I	I	V	W	X	Y	Z
V	V			①		
W	W					
X	X					②
Y	Y					
Z	Z					

Figur 5 (Aufgabe 3)



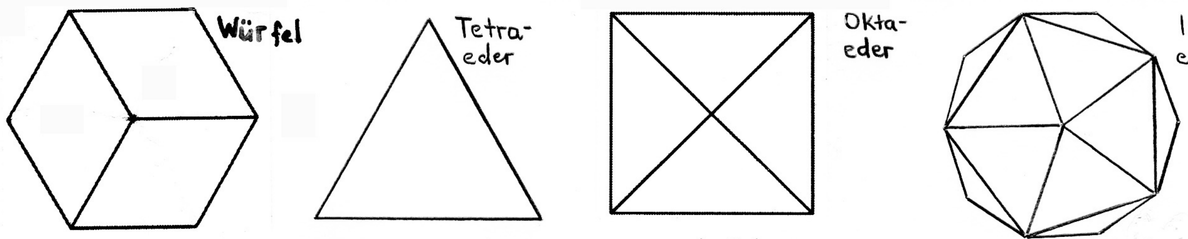
Figur 6 (Aufgabe 4)

① (a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	609
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{D}_2$	

$\boxed{5P}$

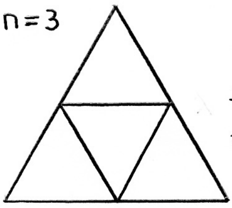
(b)



(Umrisse: reg. 6-Eck   reg. 3-Eck   reg. 4-Eck   reg. 10-Eck)

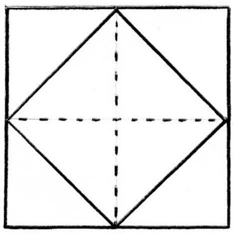
$\boxed{5P}$

(c) $n=3$

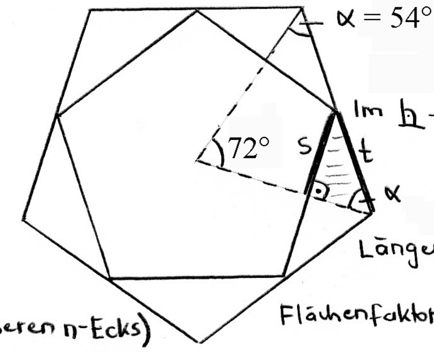


$\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

$n=4$



$\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$



Im ⊾-Dreieck:

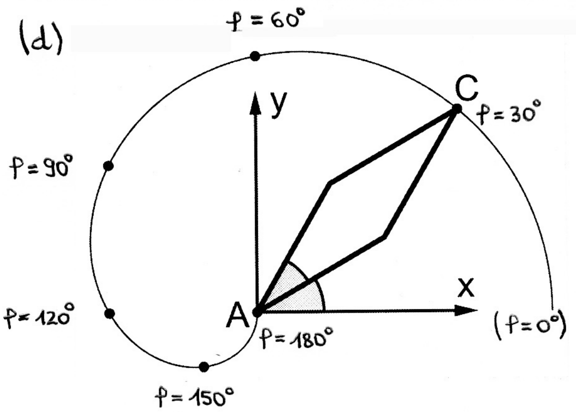
$\frac{s}{t} = \sin(54°)$

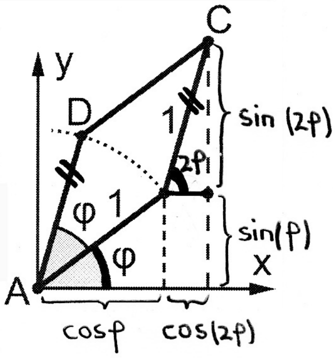
Längenfaktor: $\lambda = \frac{\cancel{2}s}{\cancel{2}t} = \frac{s}{t}$

Flächenfaktor: $\underline{\underline{\lambda^2 = \sin^2(54°)}}$

(Das innere n-Eck ist eine massstäbl. Verkleinerung des äusseren n-Ecks)

(d)





$x(\varphi) = \cos\varphi + \cos(2\varphi)$
$y(\varphi) = \sin\varphi + \sin(2\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 180°)$

$\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + \cos(2\varphi) \\ \sin\varphi + \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$

$\boxed{5P}$

② (a) Goldenes ΔABD ⇝ Winkel 72°, 72°, 36° (Diagonalendreieck im reg. 5-Eck) ⟶ $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{\text{Major}}{\text{Minor}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$
Skript Fig 2.32

Also: $|AB| = \frac{|AD|}{\phi} = \frac{s}{\phi}$

$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{|AD|}{|EF|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \phi$ ⟶ E teilt AD nach dem GS ⇝ $\phi = \frac{|DE|}{|AE|} \overset{=}{=} \frac{|AB|}{|AE|}$

(b) Das Parallelogr. ABFE ist eine massstäbl. Verkleinerung des Parallelogr. ABCD mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\phi}$ usw.

$L = |DA| + |AB| + |BF| + |FH| + \ldots = s + \frac{1}{\phi}|DA| + \frac{1}{\phi}|AB| + \frac{1}{\phi}|BF| + \ldots = s + \frac{1}{\phi}\underbrace{\left(|DA| + |AB| + |BF| + \ldots\right)}_{=L}$

$L = s + \frac{1}{\phi}L \quad \leftrightarrow \quad L - \frac{1}{\phi}L = s \quad \longleftrightarrow \quad \underline{\underline{L = \frac{s}{1 - 1/\phi}}} = \frac{s \cdot \phi}{\phi - 1} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}s$

(c) Das Zentrum der Spirale ist der Schnittpunkt von DB und AF.

Begründung: Jedes vertikale P'gramm ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden vertikalen P'gramms und hat aufgrund seiner Ecklage seine Diagonale auf der Diagonalen des vorhergehenden. Somit haben alle vertikalen P'gramme ihre Diagonale auf DB ad infinitum bis zum Grenzpunkt. (Analog haben alle horizontalen P'gramme ihre Diagonale auf AF.)

3

(a)

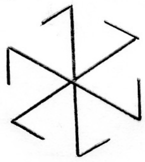
∘	I	V	W	X	Y	Z
I	I	V	W	X	Y	Z
V	V	W	I	Y^{1}	Z^{7}	X^{6}
W	W	I	V	Z^{3}	X^{4}	Y^{5}
X	X	Y	Z	V^{8}	W	I^{2}
Y	Y	Z	X	W	I	V
Z	Z	X	Y	I	V	W

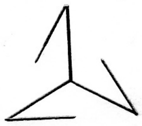
zu 8:

$X \circ X = X \circ (Z \circ V) = (X \circ Z) \circ V \overset{(2)}{=} I \circ V = V$

(b) Symm(Ω) besitzt 6 Elemente $\rightarrow$ $\underbrace{\mathbb{D}_3}_{\text{nicht Kommutativ!}}$ oder $\mathbb{C}_6$

$\{I, V, W\}$ besitzt 3 Elemente $\rightarrow$ $\mathbb{C}_3$ (Skript Abb 2.10)

Ω_1 

Ω_2 

(c) $\{I, Y\}$ denn

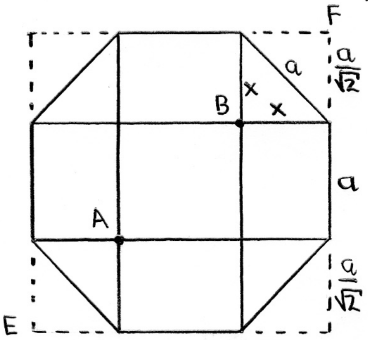
∘	I	Y
I	I	Y
Y	Y	I

(d) Die Forderungen sind nötig! $\mathbb{D}_3$ besitzt ebenfalls 6 Elemente und die Untergruppe $\{I, R_{z,120°}, R_{z,240°}\}$
($\mathbb{D}_3$ enthält Spiegelungen / ist nicht kommutativ und damit <u>echt</u> verschieden)

4

(a) Anzahl Ecken: $e = 24$, Anzahl Kanten: $k = 48$, Anzahl Flächen: $f = 26$ $\rightarrow$ $e - k + f = 2$ (stimmt)

(b)

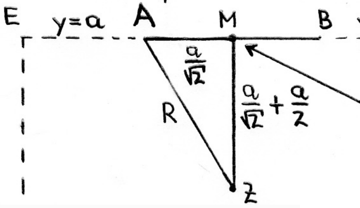


(Umriss: reg. 8-Eck)

$W = a + 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = a + \sqrt{2}\,a$

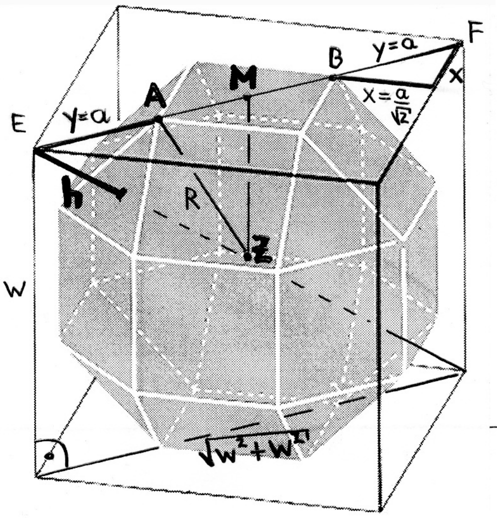
$x^2 + x^2 = a^2$, $x^2 = \frac{a^2}{2}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

(c)



$y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = a^2$

$|AM| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{2}}$



$R^2 = |AM|^2 + |MZ|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 2\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{\sqrt{2}}$

$R = a\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

(d) reg. Tetraeder (da $y = a$!)
mit Tetraederhöhe $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ (Skript S.61)

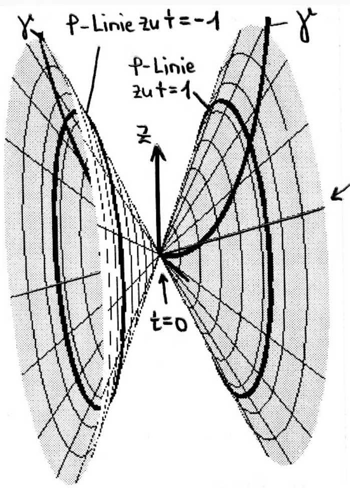
Abstand d = Würfelraumdiagonale $- 2h$

$d = \sqrt{w^2 + w^2 + w^2} - 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \sqrt{3}\,w - 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \sqrt{3}\,a + \sqrt{6}\,a - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

(e) reg. Oktaeder

5

(a) φ-Linie zu $t = \pm 1$: Kreis mit Mittelpt auf y-Achse bei $(0, \pm 1, 0)$ parallel zur (x,z)-Ebene mit Radius 2, φ-Linie zu $t = 0$: Punkt $(0,0,0)$



(b) t-Linien sind <u>Geradenstücke</u> durch $(0,0,0)$ verlaufend

(c) S entsteht durch Bewegung einer Geraden (z.B. beginnend beim "rechten" Kreis durch $(0,0,0)$ bis zum "linken" Kreis ($t = -1.5$) $\rightarrow$ Schar gerader Linien
S ist Regelfläche (Kegelfläche)
S ist abwickelbar (da Kegelfläche!)

(d)
$$\left.\begin{aligned} x &= 2t\cos\varphi \;\rightarrow\; \cos\varphi = \frac{x}{2t} = \frac{x}{2y} \\ y &= t \\ z &= 2t\sin\varphi \;\rightarrow\; \sin\varphi = \frac{z}{2t} = \frac{z}{2y} \end{aligned}\right\}$$

Idee: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$\frac{x^2}{4y^2} + \frac{z^2}{4y^2} = 1$

$\underline{\underline{x^2 + z^2 = 4y^2}}$

(e) $\gamma: \vec{r}(\varphi) \overset{t=\varphi}{=} \begin{pmatrix} 2\varphi\cos\varphi \\ \varphi \\ 2\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\quad \vec{r}\,'(\varphi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi + 2\varphi(-\sin\varphi) \\ 1 \\ 2\sin\varphi + 2\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}\,'(0) \underset{\varphi=0}{=} \begin{pmatrix} 2+0 \\ 1 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schraubenlinie auf Kegeloberfläche!