ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

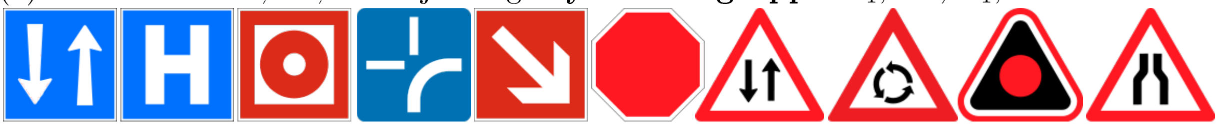
Sommer 2011
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Geben Sie zu $1, \dots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{C}_1, \dots$ an.

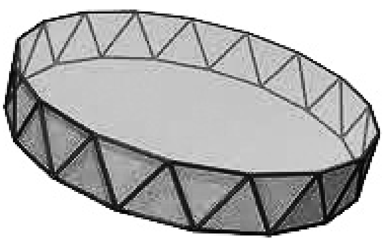


(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

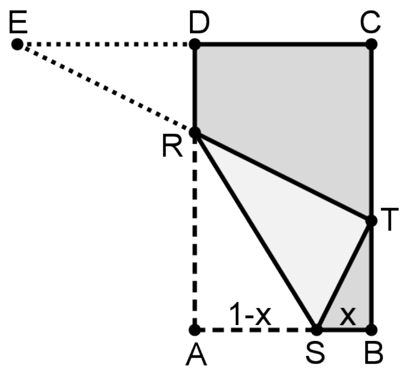
   (b) Ein **Antiprisma** besitzt als Grund- und Deckfläche zwei kongruente, parallel übereinander liegende, reguläre n-Ecke, welche gegeneinander um $\frac{180°}{n}$ verdreht sind (Figur 1). Die Seitenflächen sind kongruente, gleichschenklige Dreiecke. (b1) Skizzieren Sie ein Antiprisma mit quadratischer Grundfläche. (b2) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen (ausgedrückt mit n) hat ein Antiprisma mit n-eckiger Grundfläche? (b3) Kann einer der Platonischen Körper als Antiprisma aufgefasst werden? Wenn ja, welcher?
   (b4) Gibt es Antiprismen, die nicht konvex sind? Wenn ja, skizzieren Sie ein solches.

   (c) Die Ecke A des **Goldenen Rechtecks** $ABCD$ mit $|AB| = 1$ und $|BC| = \phi$ wird auf den Punkt T gefaltet, der BC nach dem Goldenen Schnitt teilt (Figur 2). Es entsteht das Dreieck SBT. Berechnen Sie $x = |SB|$ und dann $y = |CE|$ mit der Tatsache, dass ΔTCE eine massstäbliche Vergrösserung von ΔSBT ist. (Rechenerleichterung: $\phi^2 = \phi + 1$)

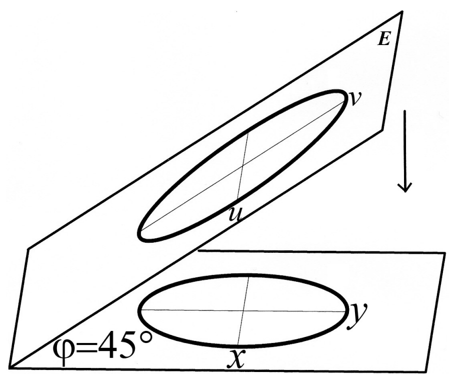
   (d) Eine **Uhr** liegt in der mit 45° gegenüber dem Boden geneigten transparenten Ebene E, der 2 m lange Sekundenzeiger starte zur Zeit $t = 0$[s] bei 12 Uhr im höchsten Punkt (Figur 3). Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bewegung, die die Spitze der (vertikalen) Projektion des Sekundenzeigers auf dem Boden beschreibt.



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1c)

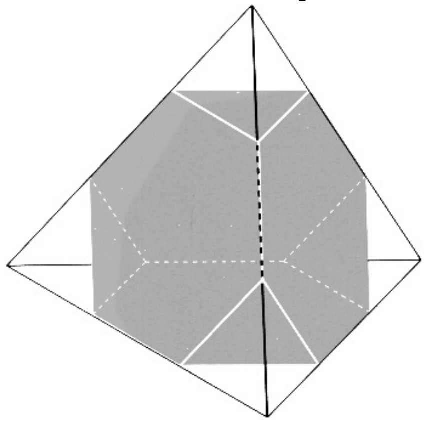


Figur 3 (Aufgabe 1d)

2. [9P.] Von der ebenen **Figur** Ω ist bekannt, dass sie punkt- und achsensymmetrisch ist. Bezeichne Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der Symmetriegruppe von Ω sowie Z das Symmetriezentrum und g die Symmetriachse.
   (a) Welche Elemente hat Symm(Ω) im Minimum? Wie lautet die zugehörige Gruppentafel?
   (b) Skizzieren Sie eine Figur Ω mit der Symmetriegruppe aus Teilaufgabe (a). (Z, g angeben!)
   (c) Von der Figur Ω ist bekannt, dass sie punkt- und achsensymmetrisch ist. Zählen Sie *alle* möglichen Gruppen aus $\mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{C}_1, \dots$ auf, die als Symmetriegruppe in Frage kommen.
   (d) Ω sei punkt-, achsen- und translationssymmetrisch. Skizzieren Sie ein mögliches Ω.

3. [10P.] Von einem regulären Tetraeder werden alle vier 'Ecken' abgeschnitten, so dass ein **Tetraederstumpf** entsteht, welcher durch vier reguläre Sechsecke und vier gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge a begrenzt wird (Figur 4).

   (a) Der Tetraederstumpf stehe mit einem Sechseck auf der Grundrissebene (Figur 4). Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Achten Sie in der Skizze auf korrekte Winkel & Streckenverhältnisse.)
   (b) Wie gross ist das Volumen des Tetraederstumpfs (ausgedrückt durch a)?
   (c) Der Tetraederstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.
   Skizzieren Sie dazu Tetraeder und -stumpf im Würfel (Figur 2.93, Skript S. 96) mit Würfelmittelpunkt Z.
   (d) Besitzt der Tetraederstumpf auch eine Kantenmittenkugel? (Falls „ja" berechnen Sie ihren Radius!) Die Kantenmittenkugel eines Körpers geht durch alle Kantenmitten des Körpers.
   (e) Werden alle Dreieckflächen des Tetraederstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen Körper, der den Tetraederstumpf enthält. Welcher Körper ist das?



Figur 4 (Aufgabe 3 & 4)

4. [10P.] Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus lauter gleichseitigen Dreiecken **und** regulären Sechsecken aufgebaut sind und nur n-kantige Ecken (d.h. in jeder Ecke stossen n Kanten zusammen) besitzen.

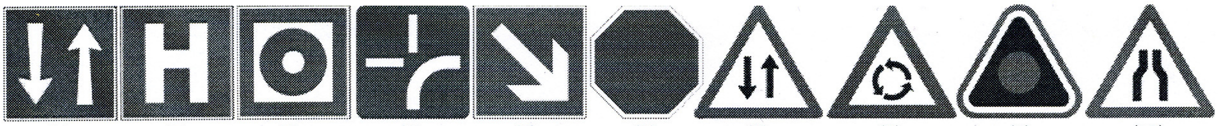
   (a) Ein solcher Körper ist der in Figur 4 abgebildete Tetraederstumpf. Überprüfen Sie an ihm die **Eulersche Polyederformel**.
   (b) Skizzieren Sie einen solchen Körper bestehend aus zwei Sechsecken und zwölf Dreiecken.
   (c) Begründen Sie durch Betrachten der möglichen Eckfiguren, dass $n \geq 5$ bei solchen Körpern nicht möglich ist.
   (d) Wie viele Dreiecke enthält ein solcher Körper für $n = 3$ und welche Aussage ist dann über die Anzahl Sechsecke möglich?
   (e) Bestimmen Sie für $n = 4$ mithilfe der Eulerschen Polyederformel eine Bedingung über die Anzahl Drei- und Sechsecke eines solchen Körpers.

5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ 0 \leq t < \infty)$$

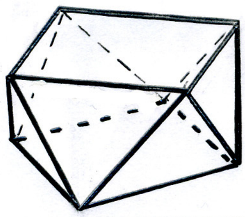
   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?
   (b) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (d) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich im allg. Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$ die φ- und die t-Linie senkrecht schneiden.
   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$.

① (a)



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_8$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_3$	$\mathbb{D}_3$	$\mathbb{D}_1$

(b1)



(b2) Anzahl

Ecken $e = 2n$

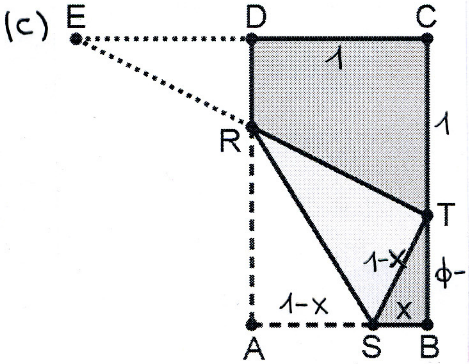
Kanten $k = 2n + 2n = 4n$

Flächen $f = 2 + 2n$

(b3) Das reguläre Oktaeder ist ein Antiprisma mit dreieckiger Grundfläche.

(b4) Alle Antiprismen sind konvex

(c)



T teilt BC nach dem GS, d.h. $\frac{|BC|}{|CT|} = \phi \rightsquigarrow |CT| = \frac{|BC|}{\phi} = 1$

$|BT| = \phi - 1$

Pythagoras im ⊾ ΔSBT: $x^2 + (\phi-1)^2 = (1-x)^2$

$x^2 + \phi^2 - 2\phi + 1 = 1 - 2x + x^2 \quad \| -x^2 - 1$

$2x = 2\phi - \phi^2 = 2\phi - (\phi+1) = \phi - 1$

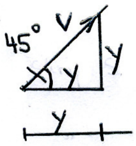
$\underline{x = \frac{\phi-1}{2}}$

$$\frac{\overset{y}{\overset{\shortparallel}{|EC|}}}{\underset{\phi-1}{|TB|}} = \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{|CT|}}}{\underset{\frac{1}{2}(\phi-1)}{|SB|}} \qquad \| \cdot \tfrac{1}{2}(\phi-1) \qquad \tfrac{1}{2}y = 1 \leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

(d) (Skript S.7)

$u(t) = R \sin\left(\frac{2\pi}{60} t\right)$

$v(t) = \underbrace{R}_{2\,[m]} \cos\left(\frac{2\pi}{60} t\right)$



$x(t) = u(t)$

$y(t) = \underbrace{\sin(45°)}_{\sqrt{2}/2} v(t)$

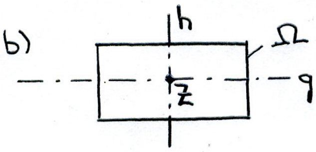
$t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin\left(\frac{2\pi}{60} t\right) \\ \sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi}{60} t\right) \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 60$

(Ellipse)

② (a) $\mathrm{Symm}(\Omega) = \{I, R_{Z,180°}, S_g, S_h\}$, denn $R \circ S_g = S_h$

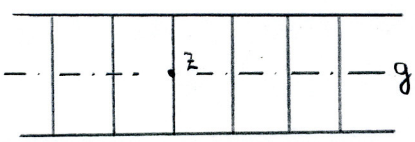
$\circ$	I	R	S_g	S_h
I	I	R	S_g	S_h
R	R	I	S_h	S_g
S_g	S_g	S_h	I	R
S_h	S_h	S_g	R	I

(b)



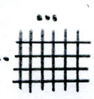
(c) $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{D}_4$, $\mathbb{D}_6$, ... ($\mathbb{D}_n$, n gerade), "$\mathbb{D}_\infty$"

(d)

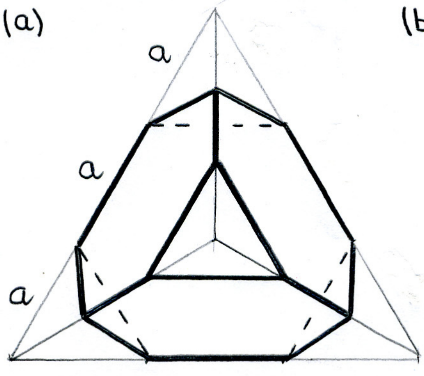


(nach links & rechts ins Unendliche fortgesetzt)

oder ein "Häuschengitter" ...



③ (a)



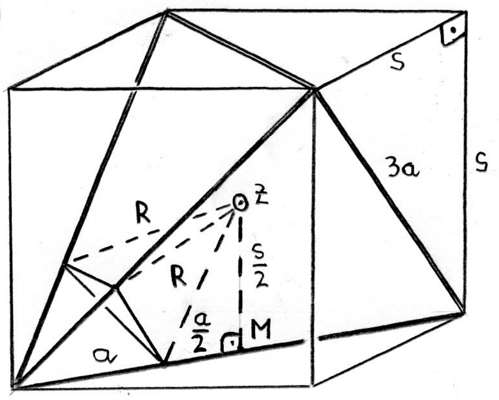
("Strecken" werden gedrittelt)

(b) Grosses Tetraeder (Skript S.61): $V_G = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \tilde{a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tilde{a} = \frac{\sqrt{2}}{12} \tilde{a}^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} 27 a^3$

Abgeschnittene Ecke: $V_E = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Volumen Stumpf: $V = V_G - 4V_E = 27 \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 - 4 \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \underline{\underline{\frac{23\sqrt{2}}{12} a^3}}$

(c)

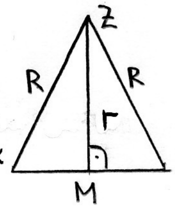


Der Umkugelmittelpunkt Z liegt aus Symmetriegründen im Würfelmittelpunkt. Der Würfel hat Kantenlänge s:

$$s^2+s^2=(3a^2) \leftrightarrow 2s^2=9a^2 \leftrightarrow s=\sqrt{\tfrac{9}{2}}\,a$$

Im ⊾ Dreieck: $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{9a^2}{2}=\frac{4a^2+18a^2}{16}$

$$\underline{\underline{R=\frac{\sqrt{22}}{4}\,a}}$$



(d) Ja. Jede Verbindung vom Zentrum Z mit einer Kantenmitte führt zu folgendem Dreieck

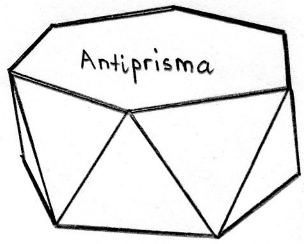
$$r=\frac{s}{2}=\sqrt{\frac{9}{2}}\,a=\sqrt{\frac{2\cdot 9}{4}}\,a=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\,3}{2}\,a}}$$

(e) Ein reguläres Tetraeder

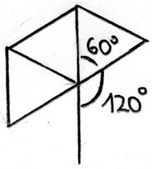
---

4 (a) $e=12,\ k=18,\ f=8 \qquad e-k+f=2$ ✓

(b)



(c)



Eine Eckfigur besteht aus mind. 1 6-Eck (120°)
Dann sind maximal 3 Dreiecke (60°) möglich.
Dies gibt maximal 4 Kanten.
(1 Sechseck und 4 Dreiecke sind flach → 360°)

(d) f_3, f_6 : Anzahl 3- bzw. 6-Ecke

① $n\cdot e=2k$ (In jeder Ecke stossen n Kanten zus. jede wird dabei doppelt gezählt)

② $3f_3+6f_6=2k$ (Jedes 3-Eck hat 3 Kanten, jedes 6-Eck 6, wiederum doppelt gezählt)

③ $f_3+f_4=f$

$$\rightarrow 2=e-k+f=\frac{2}{n}k-k+f=\frac{3}{n}f_3+\frac{6}{n}f_6-\frac{3}{2}f_3-3f_6+f_3+f_6$$

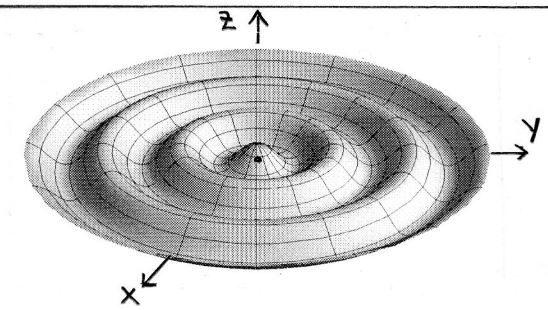
$$2=\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{2}\right)f_3+\left(\frac{6}{n}-2\right)f_6$$

$$\underset{n=3}{2\uparrow=}\frac{1}{2}f_3$$

d.h. $\underline{\underline{f_3=4}}$, f_6 keine Aussage
(Bsp. Tetraederstumpf $f_3=f_6=4$)

(e) $2=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)f_3+\left(\frac{6}{4}-2\right)f_6 \leftrightarrow \underline{\underline{2=\frac{1}{4}f_3-\frac{1}{2}f_6}}$ (Bsp. $f_3=12, f_6=2$ vgl. (b))

5



(a) φ-Linien: horizontale Kreise mit Mittelpt. auf z-Achse
t-Linien: Cosinuskurve von (0,0) radial nach aussen in Ebene ⊥ zur (x,y)-Ebene

(b) Nein, Entstehung durch Bewegung einer Geraden nicht mögl.

(c) $x=t\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi=\frac{x}{t}$

$y=t\sin\varphi \rightarrow \sin\varphi=\frac{y}{t}$

$z=\cos t$

$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

$\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2}=1$

$\sqrt{x^2+y^2}=t$

$$\underline{\underline{z=\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}}$$

(d) Richtung der φ-Linie in $\vec{r}_0$: $\vec{s}=\vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0)=\begin{pmatrix}-t_0\sin\varphi_0\\ t_0\cos\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}$

Richtung der t-Linie in $\vec{r}_0$: $\vec{t}=\vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0)=\begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\ \sin\varphi_0\\ -\sin t_0\end{pmatrix}$

$\vec{s}\cdot\vec{t}=-t_0\sin\varphi_0\cos\varphi_0+t_0\cos\varphi_0\sin\varphi_0+0=0$

(Für $t_0\neq 0$ ist $\vec{s},\vec{t}\neq\vec{0}$ und Skalarprod. 0)

d.h. $\vec{s}\perp\vec{t}$

(e)

$$\vec{n}=\vec{s}\times\vec{t}=\begin{pmatrix}-t_0\sin\varphi_0\\ t_0\cos\varphi_0\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi_0\\ \sin\varphi_0\\ -\sin t_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t_0\sin t_0\cos\varphi_0\\ -t_0\sin t_0\sin\varphi_0\\ -t_0\underbrace{(\sin^2\varphi_0+\cos^2\varphi_0)}_{=1}\end{pmatrix}=\underline{\underline{(-t_0)\begin{pmatrix}\sin t_0\cos\varphi_0\\ \sin t_0\sin\varphi_0\\ 1\end{pmatrix}}}$$

$-t_0\sin\varphi_0 \qquad \cos\varphi_0$

$t_0\cos\varphi_0 \qquad \sin\varphi_0$