ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Sommer 2012
Dozent
Dr. M. Leupp

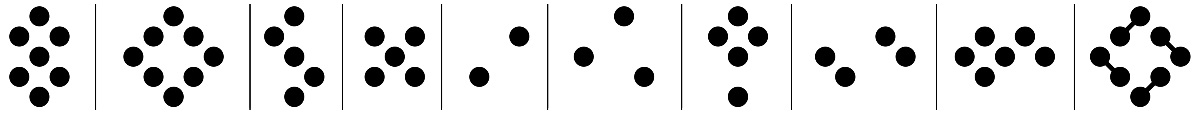
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.

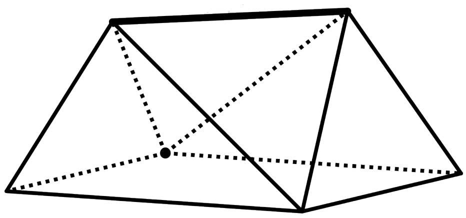


(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

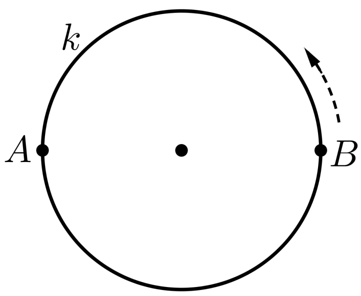
   (b) Ein **Keil** ist ein Polyeder mit einem n-Eck als Grundfläche und einer dazu parallelen Strecke (Schneide) als „Deckfläche". Die Seitenflächen sind Dreiecke oder Trapeze. Figur 1 zeigt einen Keil mit lauter dreieckigen Seitenflächen. (b1) Wie viele Ecken, Kanten und Flächen (ausgedrückt mit n) hat ein Keil mit lauter dreieckigen Seitenflächen? Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel! (b2) Skizzieren Sie einen Keil mit dreieckigen *und* trapezförmigen Seitenflächen. Wie muss die Schneide bezüglich dem gegebenen n-Eck ausgerichtet sein, damit der Keil auch trapezförmige Seitenflächen enthält? (b3) Skizzieren Sie einen Keil, der nicht konvex ist.

   (c) Gegeben ist der **Kreis** k mit Radius 2 und Durchmesser AB (Figur 2). Während A fest bleibt, bewegt sich B entlang der Kreislinie k. Dabei überstreicht der *Mittelpunkt* C der Kreissehne AB eine Kurve γ.
   (c1) Übertragen Sie die Figur in Ihre Unterlagen, zeichnen Sie ein Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Kurve γ.
   (c2) Um was für eine Kurve handelt es sich bei γ? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente und Begründung z. B. mithilfe der Parameterdarstellung von γ)

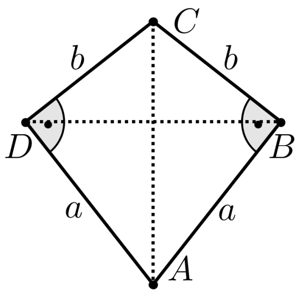
   (d) Im **rechtwinkligen Drachenviereck** $ABCD$ (Figur3) ist das Verhältnis der längeren Diagonale $d = |AC|$ zur längeren Seite a gleich gross wie das Verhältnis der längeren Seite a zur kürzeren Seite b. Wie gross ist dann das Verhältnis der längeren Diagonale d zur kürzeren Seite b? Um was für ein Verhältnis handelt es sich?



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1c)



Figur 3 (Aufgabe 1d)

2. [9P.] Im Folgenden werden **konvexe Polyeder** betrachtet, die aus 8 regulären n_1-Ecken und 6 regulären n_2-Ecken aufgebaut sind und nur 3-kantige Ecken (d.h. in jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen) besitzen.

   (a) Begründen Sie durch Betrachten der prinzipiell möglichen Eckfiguren, dass $n_1 = 6$ und $n_2 = 4$ möglich ist.
   (b) Skizzieren Sie einen solchen Körper mit $n_1 = 3$ und $n_2 = 8$. (Tipp: Vom Würfel ausgehen)
   (c) Bestimmen Sie mithilfe der Eulerschen Polyederformel alle Lösungen für n_1 und n_2.

Bitte wenden!

3. [9P.] Bezeichne Ω den abgebildeten **Pfeilwürfel** (Figur 4). (Es handelt sich um einen Würfel, auf dessen Flächen kongruente Pfeile gezeichnet sind. Die Strichelung ist in (a),(b),(c) zu berücksichtigen.)

   (a) Ermitteln Sie Symm(Ω), d.h. finden Sie alle 3 Symmetrietransformationen von Ω.
   („Typ“ gemäss Liste im Skript auf S. 93 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)

   (b) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf.

   (c) Welche Symmetriegruppe einer ebenen Figur hat die gleiche Struktur wie Symm(Ω)? (Gleiche Struktur bedeutet jedes Element entspricht einem Element von Symm(Ω) und bezüglich diesen Entsprechungen sind die beiden Gruppentafeln identisch.)

   (d) Welche 3 Symmetrietransformationen umfasst die Symmetriegruppe zusätzlich, wenn alle Pfeile gleich gezeichnet sind (d.h. die Strichelung ignoriert wird)?

   (e) Erstellen Sie zu den 3 Symmetrietransformationen aus (d) (d.h. nur zu diesen 3 Elementen) die zugehörige Verknüpfungstafel.

4. [10P.] Figur 5 zeigt einen **Würfelstumpf**, der aus lauter regelmässigen Dreiecken und regelmässigen Achtecken der Seitenlänge $a = 1$ aufgebaut ist.

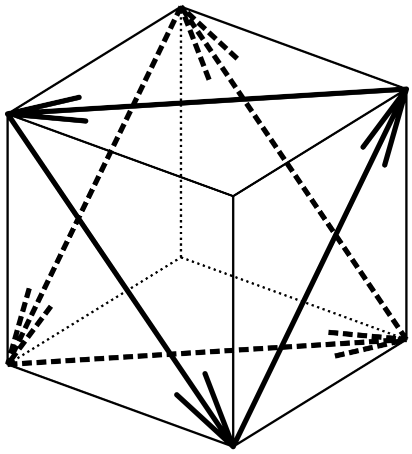
   (a) Der Würfelstumpf stehe mit einer Dreieckfläche auf der Grundrissebene. Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Von oben nicht sichtbare Kanten weglassen. Achten Sie auf korrekte Winkel.)

   (b) Wie gross ist die Kantenlänge w des umgebenden Würfels?

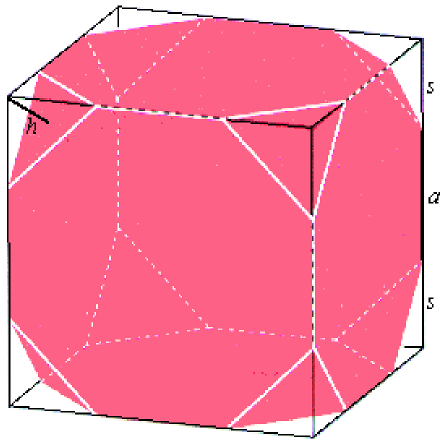
   (c) Der Würfelstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.

   (d) Wie gross ist das Volumen des Würfelstumpfs?

   (e) Ermitteln Sie die Höhe h einer abgeschnittenen Eckpyramide.



Figur 4 (Aufgabe 3)



Figur 5 (Aufgabe 4)

5. [12P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1)$$

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?

   (b) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

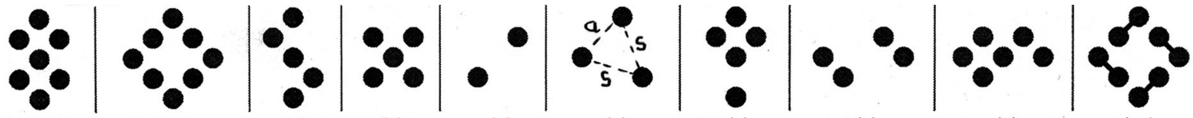
   (c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.

   (d) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$.

   (e) Unter welchem Winkel treffen die t-Linien auf die (x, y)-Ebene?

1

(a)

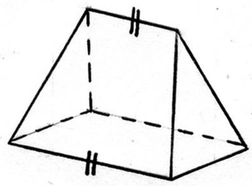


(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_4$

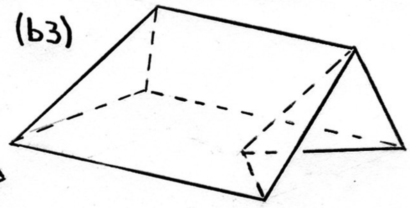
(b1) $e = n+2$, $k = n + (n+2) + 1 = 2n+3$, $f = n+3$

$e - k + f = n+2-(2n+3)+n+3 = 2$ ✓

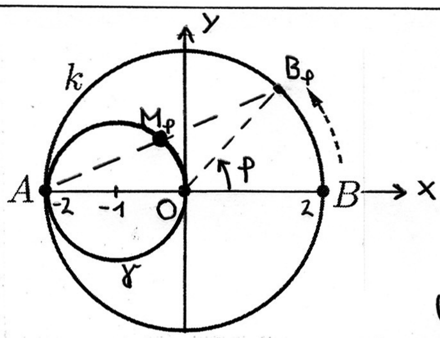
(b2) Parallel zu einer n-Eck Seite



(b3)



(c1)



$B_\varphi = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi) \quad 0 \le \varphi < 2\pi \qquad AB_\varphi = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - (-2) \\ 2\sin\varphi - 0 \end{pmatrix}$

$OM_\varphi = OA + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_\varphi} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\cos\varphi + 2 \\ 2\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$\gamma : \varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (0 \le \varphi < 2\pi)$

(c2) Kreis um $(-1,0)$ mit Radius 1 : $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

(d) $\frac{d}{a} = \frac{a}{b} \rightsquigarrow a^2 = d \cdot b$ ①

$a^2 + b^2 = d^2 \rightsquigarrow d^2 - b^2 = a^2$ ②

(ev. zur Vereinfachung $b = 1$ wählen)

$\left.\right\}$ $d^2 - b^2 = d \cdot b$

$d^2 - db - b^2 = 0 \;\|\; : b^2$

$\left(\frac{d}{b}\right)^2 - \left(\frac{d}{b}\right) - 1 = 0$ Quad. Glch.

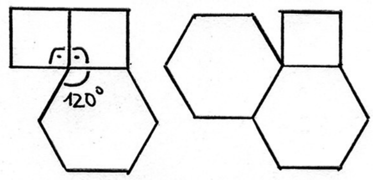
$\frac{d}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ Verhältnis des Goldenen Schnitts

2

(a) 3-kantige Ecken $\rightsquigarrow$ Eine Eckfigur besteht aus 3 Flächen

1. Möglichkeit: 2 Quadrate und 1 reg. 6-Eck $\rightsquigarrow$ ∡ Summe 300° ✓

2. Möglichkeit: 1 Quadrat und 2 reg. 6-Ecke $\rightsquigarrow$ ∡ Summe 330° ✓



(b) Siehe Figur 5 (Aufgabenblatt)

(c) ① $3 \cdot e = 2k$ (In jeder Ecke stossen 3 Kanten zusammen, jede wird dabei doppelt gezählt.)

② $f = 6 + 8 = 14$

③ $8n_1 + 6n_2 = 2k$ (Jedes der acht n_1-Ecke hat n_1 Kanten, jedes der sechs n_2-Ecke hat n_2 Kanten, Doppelt gezählt)

$2 = e - k + f = \frac{2}{3}k - k + 14$

$= -\frac{1}{3}k + 14 = -\frac{1}{3}(4n_1 + 3n_2) + 14$

$\frac{1}{3}(4n_1 + 3n_2) = 12$

$\underline{4n_1 + 3n_2 = 36}$

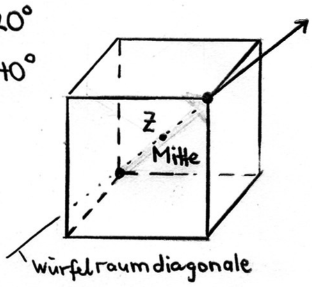
Einzige natürlichzahlige Lösungen: $n_1 = 3, n_2 = 8$

$n_1 = 6, n_2 = 4$

3

(a) Symm(Ω): I Identität, $R_{120°}$ Rotation um Würfelraumdiagonale um 120°

$R_{240°}$ " " " " 240°



(b)

∘	I	R_{120}	R_{240}
I	I	R_{120}	R_{240}
R_{120}	R_{120}	R_{240}	I
R_{240}	R_{240}	I	R_{120}

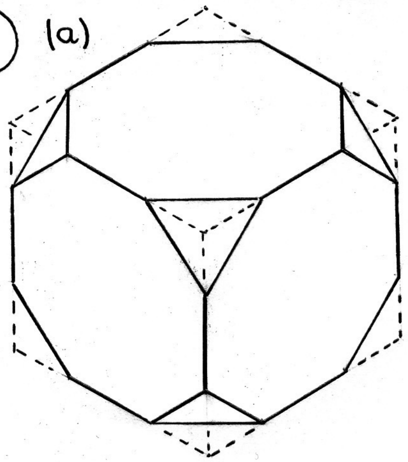
(c) $\mathbb{C}_3$

(d) Drehspiegelungen mit Drehachse = Würfelraumdiagonale und Spiegelungsebene ⊥ dazu durch Z mit Drehwinkel 60°, 180° (Punktspiegelung an Z!), 300° : $DS_{60°}$, Π_Z, $DS_{300°}$

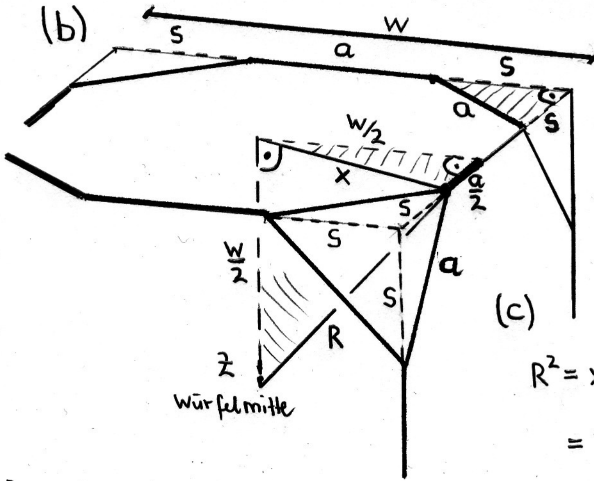
(e)

∘	DS_{60}	Π_Z	DS_{300}
DS_{60}	R_{120}	R_{240}	I
Π_Z	R_{240}	I	R_{120}
DS_{300}	I	R_{120}	R_{240}

4 (a)



(b)



$a^2 = s^2 + s^2 = 2s^2, \quad a = \sqrt{2}\,s$

$s = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$w = s + a + s = a + \frac{2a}{\sqrt{2}}$

$\underline{w = a(1+\sqrt{2})}$

(c) $x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2$

$R^2 = x^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{w^2}{4} + \frac{w^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}w^2$

$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^2 a^2 = \left(\frac{7}{4} + \sqrt{2}\right)a^2$

$R = \sqrt{\frac{7}{4}+\sqrt{2}}\; a \approx \underline{1.7788\, a}$

(d) $V_{Würfel} = w^3 = a^3(1+\sqrt{2})^3, \quad V_{Ecke} = \frac{1}{3}G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{s\cdot s}{2}\cdot s = \frac{1}{6}s^3$

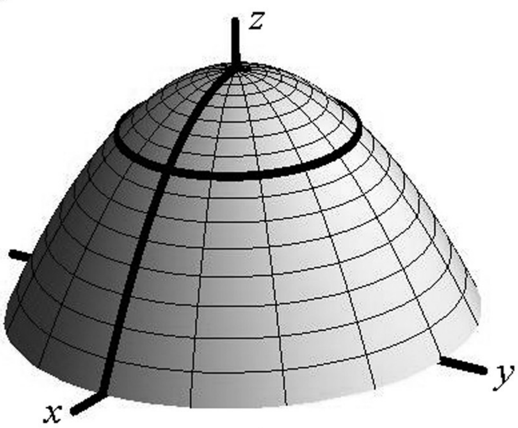
$V = V_{Würfel} - 8\cdot V_{Ecke} = a^3(1+\sqrt{2})^3 - 8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{2}^3} \approx \underline{a^3\cdot 13.59966}$

$s^3 = \frac{a^3}{\sqrt{2}^3} = \frac{a^3}{2\sqrt{2}}$

(e) h_{Ecke}: $V_{Ecke} = \frac{1}{3}G_{Ecke}\,h_{Ecke} = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a}_{F_\Delta \text{ Skript S. 61}}\cdot h_{Ecke} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 h_{Ecke} \overset{soll}{=} \frac{1}{6}s^3, \quad h_{Ecke} = \frac{2s^3}{\sqrt{3}a^2} \Big| \frac{a}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}a$

$\approx 0.408\, a$

5



(a) φ-Linien: Kreise mit Mittelpt. auf z-Achse parallel (x,y)-Ebene

t-Linien: (Halb-)Parabeln mit Scheitel in (0,0,1) nach unten geöffnet mit Öff.faktor −1, in Ebenen ⊥ (x,y)-Ebene

(b) Nein, Entstehung durch Bewegung einer Geraden nicht mögl.

(c) $x = t\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi = \frac{x}{t}$

$y = t\sin\varphi \longrightarrow \sin\varphi = \frac{y}{t}$

$z = 1 - t^2 \longrightarrow t^2 = 1 - z$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$

$\underline{\underline{x^2 + y^2}} = t^2 = \underline{\underline{1 - z}}$

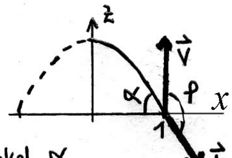
(d) Richtung der φ-Linie in $\vec{r}_0$: $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -t_0\sin\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtung der t-Linie in $\vec{r}_0$: $\vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ -2t_0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \vec{s}\times\vec{t} = \begin{pmatrix} -t_0\sin\varphi_0 \\ t_0\cos\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ -2t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_0^2\cos\varphi_0 \\ -2t_0^2\sin\varphi_0 \\ -t_0\underbrace{(\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0)}_{=1} \end{pmatrix} = (-t_0)\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2t_0\cos\varphi_0 \\ 2t_0\sin\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad (t_0 \neq 0)$$

$-t_0\sin\varphi_0 \quad \cos\varphi_0$

$t_0\cos\varphi_0 \quad \sin\varphi_0$



(e) Rotationssymm. → alle (Halb-)Parabeln sind kongruent und haben den gleichen Auftreffwinkel α

Wähle t-Linie zu φ=0: $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos 0 \\ t\sin 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$ Auftreffpunkt: $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \overset{soll}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \to t = 1$

$x = 1, y = 0$

Richtung der t-Linie in (1,0,0): $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
($\varphi_0 = 0$, $t_0 = 1$)

zw. ∢

$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|\;\|\cdot\|\;\|} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ $\quad \underline{\underline{\alpha = 63.4349°}}$

vgl. Skizze

Richtung der Vertikalen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(oder $\tan\alpha = \frac{d}{dt}(1-t^2)\big|_{t=1} = -2$)