ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Frühling 2009
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

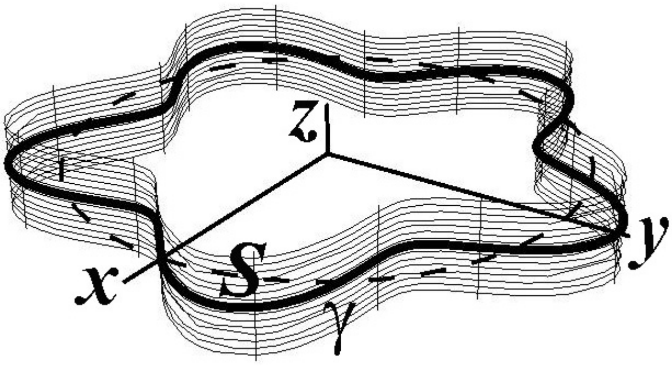
   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

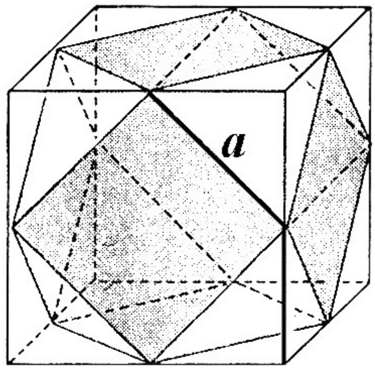
   (b) Ein reguläres **Tetraeder** wird durch gleichseitige Dreiecke begrenzt. Verbindet man die Mittelpunkte (Schwerpunkte) dieser gleichseitigen Dreiecke, entsteht ein kleinerer Körper. (Bem: Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie, hier die Seitenflächenhöhe, im Verhältnis 2:1.) (b1) Um was für einen Körper handelt es sich? (b2) Wie gross ist das Verhältnis der Oberflächeninhalte vom kleineren Körper zum ursprünglichen Tetraeder? (b3) Wie gross ist das Verhältnis der Volumeninhalte?

   (c) (c1) Überprüfen Sie die **Eulersche Polyederformel** für den in Figur 2 abgebildeten Würfelstumpf. (c2) Betrachten Sie konvexe Polyeder, die aus lauter Drei- und Vierecken bestehen und nur n-kantige Ecken (in jeder Ecke stossen n Kanten zusammen) besitzen. Für welches n ist mithilfe der Polyederformel *keine Aussage* über die Anzahl Vierecke solcher Polyeder möglich? Was lässt sich über die Anzahl Dreiecke aussagen?

   (d) Figur 1 zeigt eine (parallel zur z-Achse verlaufende, in beide Richtungen unbegrenzte) **Fläche** S. Die Leitkurve γ verläuft in der (x, y)-Ebene und oszilliert „sinusförmig" mit radialen Abweichungen ± 1 um die kreisförmige, gestrichelte Mittellinie vom Radius 5.
   (d1) Was für eine Fläche ist S? (d2) Wie lautet eine mögliche Parameterdarstellung von γ? (d3) Wie lautet eine mögliche Parameterdarstellung von S?



Figur 1 (Aufgabe 1d)



Figur 2 (Aufgabe 2)

2. [12P.] Figur 2 zeigt einen **Würfelstumpf**, welcher aus lauter Dreiecken und Vierecken der Seitenlänge a aufgebaut ist. (Alle Ecken des Würfelstumpfs sind Kantenmitten des Würfels.)

   (a) Wie gross ist das Volumen V des Würfelstumpfs (ausgedrückt durch a).

   (b) Berechnen Sie den Radius R der Umkugel und den Radius r der Kantenmittenkugel.(Die Kantenmittenkugel ist diejenige Kugel, die durch alle *Kantenmitten des Würfelstumpfs* geht.)

   (c) Ermitteln Sie den Abstand zweier paralleler Dreieckflächen.

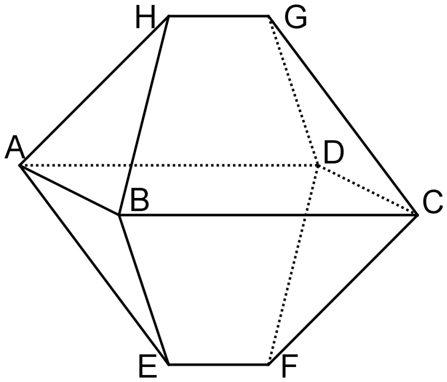
   (d) Der Würfelstumpf stehe mit einer Dreieckfläche auf der Grundrissebene. Skizzieren Sie die Ansicht von oben (den Grundriss). (Von oben nicht sichtbare Kanten weglassen.)

   (e) Werden alle Dreieckflächen des Würfelstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen weiteren Körper, der den Würfelstumpf enthält. Welcher Körper ist das und wie gross ist seine Kantenlänge (ausgedrückt durch a).

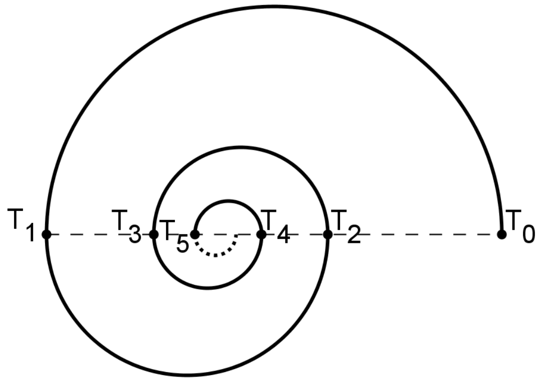
Bitte wenden!

3. [10P.] Bezeichne Ω den abgebildeten **Doppelkeil** (Figur 3). ($ABCD$ ist ein Rechteck, EF und HG verlaufen parallel zu AD bzw. BC und sind bezüglich AD und BC bzw. AB und DC zentriert.)

   (a) Begründen Sie kurz, dass Ω höchstens acht Symmetrietransformationen besitzen kann.
   (b) Ermitteln Sie Symm(Ω), d.h. finden Sie alle acht Symmetrietransformationen von Ω. („Typ" gemäss Liste im Skript auf S. 93 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)
   (c) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf. (Der rechte, obere Teil der Tafel bis und mit der Diagonalen genügt! Schreiben Sie in der Kopfzeile der Tafel zuerst die vier orientierungstreuen, dann die vier nicht orientierungstreuen Symmetrietransformationen.)
   (d) Hat $\mathbb{D}_4$, $\mathbb{C}_8$ oder keine der beiden die gleiche Struktur wie Symm(Ω)? (Kurze Begründung!) (Gleiche Struktur bedeutet jedes Element von z.B. $\mathbb{D}_4$ entspricht einem Element von Symm(Ω) und bezüglich diesen Entsprechungen sind die beiden Gruppentafeln identisch.)



Figur 3 (Aufgabe 3)



Figur 4 (Aufgabe 4)

4. [7P.] Die Strecke T_0T_1 hat die Länge s (Figur 4). Der Punkt T_2 teilt die Strecke T_1T_0 nach dem Goldenen Schnitt. T_3 teilt T_2T_1 nach dem Goldenen Schnitt, T_4 die Strecke T_3T_2 usw. (Dabei liege der Major jeweils stets beim erstgenannten Punkt der Strecke.) Über jeder dieser Strecken ist ein Halbkreis gezeichnet, wodurch die **Halbkreis-Spirale** $T_0T_1T_2T_3T_4T_5\ldots$ entsteht.

   (a) Berechnen Sie die Länge der Halbkreis-Spirale (ausgedrückt durch s) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit". (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)
   (b) Bestimmen Sie die Lage des Zentrums der Spirale, d.h. den Abstand x des Zentrums vom Punkt T_0 (ausgedrückt durch s).

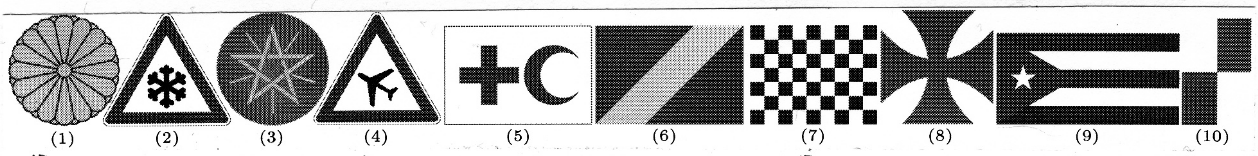
5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi,t)\longmapsto \vec{r}\,(\varphi,t) := \begin{pmatrix} t\cos\varphi + t \\ t\sin\varphi \\ 2\sin(\frac{\varphi}{2})(1-t) \end{pmatrix} \qquad (0\le\varphi\le 2\pi\,,\ 0\le t\le 1)$$

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t=0$ und $t=1$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)
   (b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien (insbesondere die t-Linie zu $\varphi=0$). Was für Kurven sind die t-Linien?
   (c) Ist S eine Regelfläche? (Begründung ohne Rechnung) Ist S abwickelbar? (Ohne Begründung)
   (d) Die Kurve γ (φ-Linie zu $t=\frac{1}{2}$) ist die Schnittkurve der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 und der Fläche S. Zeigen Sie dies! Verwenden Sie: $[\sin(\frac{\varphi}{2})]^2 = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$
   (e) Die Kurve γ (φ-Linie zu $t=\frac{1}{2}$) startet und endet auf der (x,y)-Ebene. Zeigen Sie, dass Start- und Endrichtung einen rechten Winkel einschliessen.

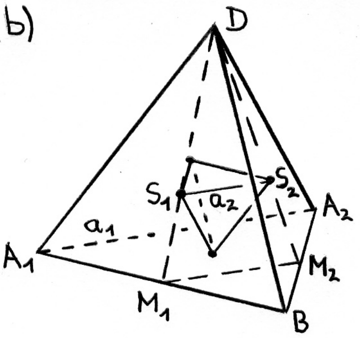
1

(a)



$\mathbb{D}_{16}$ $\mathbb{D}_3$ $\mathbb{C}_5$ $\mathbb{D}_1$ $\mathbb{D}_1$ $\mathbb{C}_2$ $\mathbb{D}_2$ $\mathbb{D}_4$ $\mathbb{C}_1$ $\mathbb{C}_2$

(b)



(b1) reguläres Tetraeder (verkleinert)

(b2) $|M_1M_2| = \frac{1}{2}|A_1A_2| = \frac{1}{2}a_1$ (ΔM_1BM_2 ist eine massstäbl. Verkleinerung d. ΔA_1BA_2 mit Faktor 1/2 da M_1, M_2 Kantenmitten sind.)

$a_2 = |S_1S_2| = \frac{2}{3}|M_1M_2| = \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}a_1$ (ΔDS_1S_2 ist eine massstäbl. Verkleinerung d. ΔDM_1M_2 mit Faktor 2/3 da S_1, S_2 Schwerpunkte sind.)

$\rightarrow$ Längenfaktor: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3} = \lambda$ $\rightarrow$ Flächenfaktor: $\lambda^2 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$ (Verhältnis Oberfläche_2 zu Oberfläche_1)

(b3) Volumenfaktor: $\lambda^3 = \underline{\underline{1/27}}$ (Volumenverhältnis)

(c) (c1) $e = 12$, $k = 24$, $f = 14$ $\quad e - k + f = 12 - 24 + 14 = 2$ ✓

(c2) f_3, f_4 : Anzahl 3- bzw. 4-Ecke

① $n\cdot e = 2k$ (In jeder Ecke stossen n Kanten zus. jede wird dabei zweimal gezählt)

② $3f_3 + 4f_4 = 2k$ (Jedes 3-Eck hat 3 Kanten, jedes 4-Eck 4 jede wird dabei doppelt gezählt)

③ $f_3 + f_4 = f$

$2 = e - k + f = \frac{2}{n}k - k + f = \frac{3}{n}f_3 + \frac{4}{n}f_4 - \frac{3}{2}f_3 - 2f_4 + f_3 + f_4$

$\rightarrow \quad 2 = \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\right)f_3 + \underbrace{\left(\frac{4}{n} - 1\right)}_{\text{Soll } 0} f_4 \rightarrow \underline{\underline{n = 4}}$

$n = 4$

$2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)f_3$, $f_3 = \underline{\underline{8}}$ (Bspe $f_3 = 8$ $f_4 = 6$ Fig 2, $f_3 = 8$, $f_4 = 18$)

(d) (d1) Verallgemeinerte Zylinderfläche (Regelfläche)

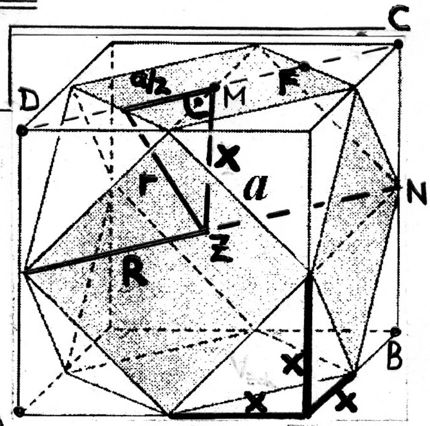
(d2) Mittellinie: Kreis mit $r = 5$ um $(0,0,0)$, $z = 0$ $\quad \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi \\ 5\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Radius r oszilliert mit ± 1 um 5 : $r = 5 + 1\cdot\sin(5\varphi)$ — 5 Wiederholungen (z.B. +1)

$\gamma: \varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} (5+\sin(5\varphi))\cos\varphi \\ (5+\sin(5\varphi))\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$

(d3) $S: (\varphi, t) \mapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} (5+\sin 5\varphi)\cos\varphi \\ (5+\sin 5\varphi)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$ $\quad (0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < t < \infty)$

2



(a) Kantenlänge des Würfels: $2x = 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,a$, denn: $\overbrace{x^2 + x^2}^{2x^2} = a^2$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Vol. des Würfels: $(2x)^3 = 8x^3$ $(= 2\sqrt{2}\,a^3)$

Vol. einer Eckpyr: $\frac{1}{3}\cdot\frac{x\cdot x}{2}\cdot x = \frac{1}{6}x^3$ $\left(= \frac{1}{12\sqrt{2}}a^3\right)$

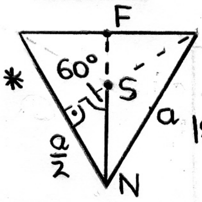
Vol. Stumpf: $V = 8x^3 - 8\cdot\frac{1}{6}x^3 = \frac{20}{3}x^3 = \frac{10}{3\sqrt{2}}a^3 = \underline{\underline{\frac{5}{3}\sqrt{2}\,a^3}}$

(b) Mittelpt. beider Kugeln ist der Würfelmittelpt. Z

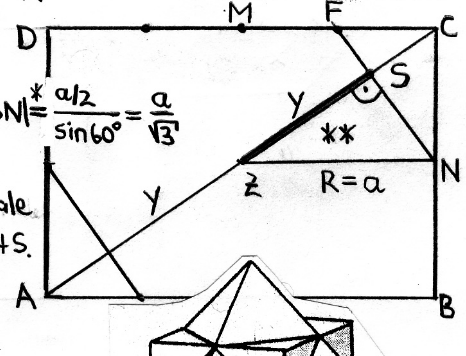
$R = \frac{1}{2}$ Würfelflächendiagonale $= 2\cdot\frac{a}{2} = \underline{\underline{a}}$

$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}$

*



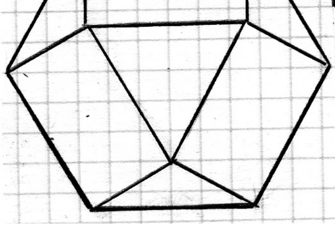
$|SN| \overset{*}{=} \frac{a/2}{\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}}$



(c) Im Schnitt durch die Diagonalfläche betrachten! Die Raumdiagonale CA steht ⊥ auf die Dreiecksfläche und durchstösst sie im ΔMittelpt S.

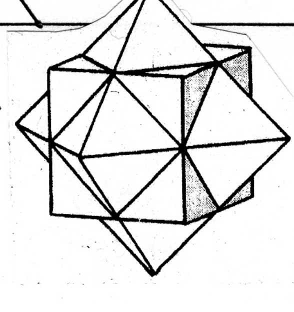
$y \overset{**}{=} \sqrt{\underbrace{|ZN|^2}_{a^2} - \underbrace{|SN|^2}_{a^2/3}} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2}$, $2y = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}}$

(d)



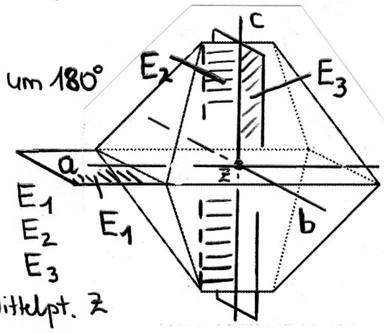
regelmässiges 6-Eck als Umriss, gleichseitiges Δ im Zentrum, dazwischen Rechtecke

(e) reguläres Oktaeder Kantenlänge 2a



③ (a) A kann durch eine Symm.trsf. des Doppelkeils höchstens nach A, B, C, D (4 Mögl.) abgebildet werden. Das Bild von B (näherer Nachbar von A) ist dann eindeutig festgelegt, hingegen gibt es für das Bild von H 2 Mögl. (oben od. unten) $\rightsquigarrow 4\cdot 1\cdot 2 = \underline{8 \text{ Mögl.}}$

(b) I Identität
R_a Rotation um Achse a um 180°
R_b — b
R_c — c
S_1 Spiegelung an Ebene E_1
S_2 — E_2
S_3 — E_3
Π Punktspiegelung am Mittelpt. Z



(c) 1. Zeile ($\hat{=}$ Kopfzeile)

I	R_a	R_b	R_c	S_1	S_2	S_3	Π
	I	R_c	R_b	S_2	S_1	Π	S_3
		I	R_a	S_3	Π	S_1	S_2
			I	Π	S_3	S_2	S_1
				I	R_a	R_b	R_c
					I	R_c	R_b
						I	R_a
							I

(Kommutativ!)

(d) keine der beiden: $\mathbb{D}_4$ enthält z.B. $R_{90°}$ mit $R_{90°} \circ R_{90°} \neq I$; $\mathbb{C}_8$ " $R_{45°}$, $R_{45°} \circ R_{45°} \neq I$ $\Big\}$ ↯ mit lauter I in Hauptdiagonale

---

④ (a) Jeder nachfolgende Halbkreis ist eine massstäbliche Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\phi}$ $\left(\text{Verhältnis des GS: } \frac{\text{Strecke}}{\text{Major}} = \frac{\text{Major}}{\text{Minor}} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

$$L = \overset{\frown}{T_0T_1} + \overset{\frown}{T_1T_2} + \overset{\frown}{T_2T_3} + \ldots = \overset{\frown}{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}\overset{\frown}{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}\overset{\frown}{T_1T_2} + \ldots = \overset{\frown}{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}\underbrace{\left[\overset{\frown}{T_0T_1} + \overset{\frown}{T_1T_2} + \ldots\right]}_{L}$$

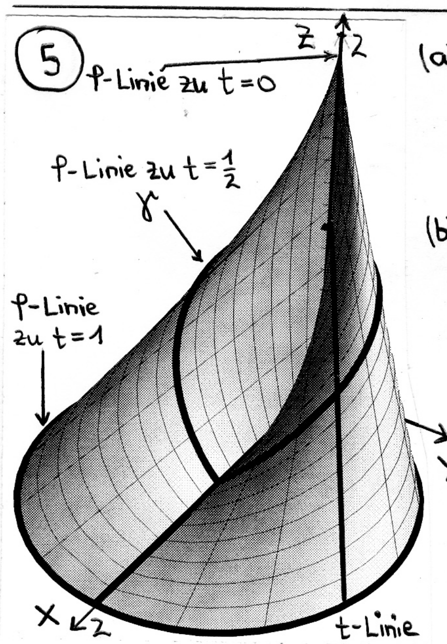
$$L = \overset{\frown}{T_0T_1} + \frac{1}{\phi}L \leftrightarrow L - \frac{1}{\phi}L = \frac{1}{2}\pi s, \quad L = \frac{1/2\,\pi s}{1 - 1/\phi} = \frac{\pi\phi s}{2(\phi-1)} = \frac{\sqrt{5}+3}{4}\pi s$$

(b)
$$x = T_0T_1 - T_1T_2 + T_2T_3 - \ldots = T_0T_1 - \frac{1}{\phi}T_0T_1 + \frac{1}{\phi}T_2T_3 - \ldots = T_0T_1 - \frac{1}{\phi}\underbrace{\left(T_0T_1 - T_2T_3 + \ldots\right)}_{x}$$

$$x = s - \frac{1}{\phi}x \leftrightarrow x + \frac{1}{\phi}x = s, \quad x = \frac{s}{1 + 1/\phi} = \frac{\phi}{\phi+1}s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s \quad \text{(Major! von } s\text{)}$$

---

⑤



(a) $t=0$: $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sin\varphi/2 \end{pmatrix}$ wobei $\underset{\varphi=0}{0} \le 2\sin\frac{\varphi}{2} \le \underset{\varphi=2\pi}{2}$ → $\underline{\underline{\text{Geradenstück } (0,0,0) \text{ zu } (0,0,2)}}$

$t=1$: $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi + 1 \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Kreis mit Mittelpt (1,0,0) und Radius $r=1$ in der (x,y)-Ebene.

(b) $\varphi = 0$, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wobei $0 \le 2t \le 2$ → Geradenstück von (0,0,0) zu (2,0,0)

allg. $\vec{r}(\varphi,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \cos\varphi + 1 \\ \sin\varphi \\ -2\sin\varphi/2 \end{pmatrix}$ t-Linien sind Geradenstücke (von der z-Achse zum Kreis in der (x,y)-Ebene)

(c) S entsteht durch Bewegung eines Geradenstücks (der eine Endpunkt bleibt fest auf der z-Achse, der andere auf dem Kreis in der (x,y)-Ebene)
⟶ Schar gerader Linien, <u>S ist Regelfläche</u>
<u>S ist nicht abwickelbar</u> (Drehung der Tangentialebene entlang der hervorgehobenen t-Linie)

(d) zu zeigen: γ liegt auf Kugel, d.h. $|\vec{r}(\varphi,\frac{1}{2})| = 1$ bzw. $|\vec{r}(\varphi,\frac{1}{2})|^2 = 1^2$

$$|\vec{r}(\varphi,\tfrac{1}{2})|^2 = \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}\right\|^2 = \left(\tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\sin\tfrac{\varphi}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\cos^2\varphi + 2\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sin^2\varphi + \overset{\text{Tipp!}}{\tfrac{1}{2}(1-\cos\varphi)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \cancel{\tfrac{1}{2}\cos\varphi} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - \cancel{\tfrac{1}{2}\cos\varphi} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} = \underline{1}$$

(e) $\vec{r}(\varphi) \overset{t=\frac{1}{2}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\varphi \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$, $\vec{r}\,'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\underset{\text{Startwert von }\varphi}{\vec{r}\,'(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\underset{\text{Endwert von }\varphi}{\vec{r}\,'(2\pi)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ beide $\neq \vec{0}$

Skalarprodukt der Tang.vektoren: $\vec{r}\,'(0)\cdot\vec{r}\,'(2\pi) = 0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \rightsquigarrow$ ⦜