Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

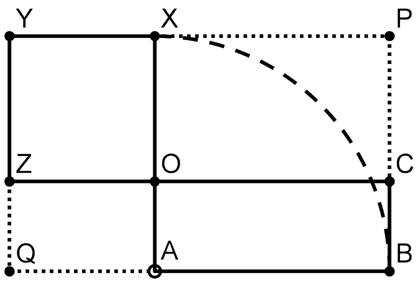
   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

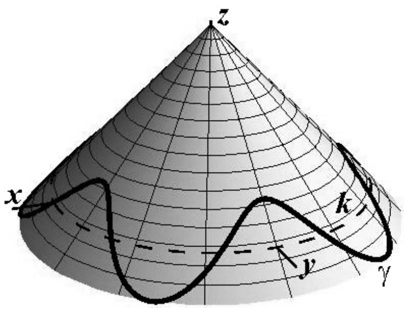
   (b) In Figur 1 sind das Rechteck $OABC$ und das Quadrat $OXYZ$ flächengleich. Wie gross ist dann das Längenverhältnis von grosser Rechteckseite zu Quadratseite? Wie viele Goldene Rechtecke lassen sich mit den beschrifteten Punkten bilden? (Aufzählen!)

   (c) Aus einem geraden **Kreiskegel** wird vom Zentrum der Grundkreisfläche her in Richtung Kegelspitze ein zylinderförmiges Loch herausgebohrt, so dass ein Kegelstumpf mit Loch (Hohlkörper) entsteht. Welchen Bruchteil des Volumens des ursprünglichen Kegels besitzt der entstandene Hohlkörper, wenn die Lochgrösse ein Viertel der Grundkreisfläche ausmacht?

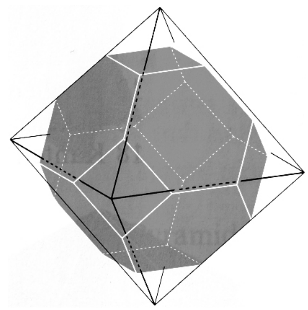
   (d) Figur 2 zeigt die **Raumkurve** γ, die auf einem geraden Kreiskegel mit dem Öffnungswinkel 90° verläuft und dabei „sinusförmig“ um den gestrichelten Kreis k vom Radius 5 mit den Abweichungen $\pm\sqrt{2}$ oszilliert. Wie lautet eine mögliche Parameterdarstellung des **Kreises** k und der Raumkurve γ. (Die Kurve γ schneidet den Kreis k genau zehnmal.)



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1d)



Figur 3 (Aufgabe 2)

2. [11P.] Von einem regulären Oktaeder werden alle sechs ‘Ecken’ abgeschnitten, so dass ein **Oktaederstumpf** entsteht, welcher durch acht reguläre Sechsecke und sechs Quadrate der Seitenlänge a begrenzt wird (Figur 3).

   (a) Der Oktaederstumpf stehe mit einem Quadrat auf der Grundrissebene (Figur3). Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Achten Sie in der Skizze auf korrekte Winkel & Streckenverhältnisse.)
   (b) Wie gross ist das Volumen des Oktaederstumpfs (ausgedrückt durch a)?
   (c) Der Oktaederstumpf besitzt eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius R.
   (d) Besitzt der Oktaederstumpf auch eine Kantenmittenkugel? (Falls „ja“ berechnen Sie ihren Radius!) Die Kantenmittenkugel eines Körpers geht durch alle Kantenmitten des Körpers.
   (e) Werden alle Quadratflächen des Oktaederstumpfs zu Ebenen ausgeweitet, ergeben deren Schnittlinien einen weiteren Körper, der den Oktaederstumpf enthält. Welcher Körper ist das und wie gross ist seine Kantenlänge (ausgedrückt durch a)?

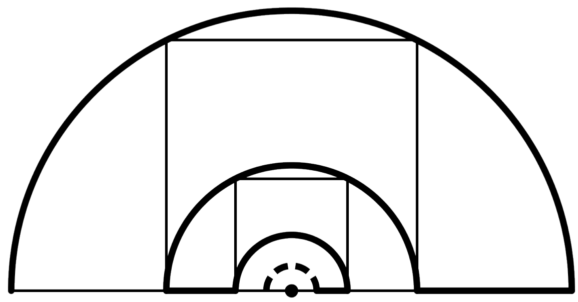
3. [7P.] Einem **Halbkreis** mit Radius r wird ein Quadrat einbeschrieben (Figur 4). Über der Grundseite des Quadrates wird der Halbkreis gezeichnet, welchem wiederum ein Quadrat einbeschrieben wird und so weiter. Alle Halbkreise bzw. Quadrate sind massstäbliche Verkleinerungen voneinander. Berechnen Sie die Länge der fett ausgezogenen Linie, die aus unendlich vielen Stücken zusammengesetzt ist. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)

4. [11P.] Von dem Würfel $ABCDEFGH$ werden von der Deckflächenmitte S ausgehend vier Eckpyramiden weggeschnitten. Dadurch entsteht der in Figur 5 abgebildete **Körper** Ω. (In der **Ecke** S stossen wechselweise senkrecht stehende und schräg verlaufende Dreiecksflächen zusammen.)

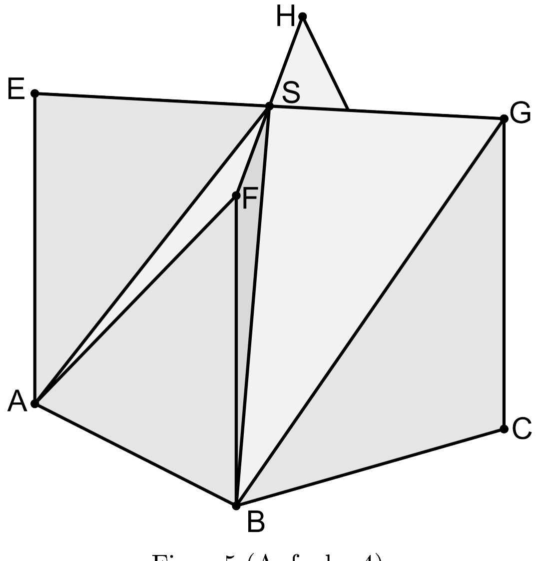
   (a) Ermitteln Sie die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen des Körpers Ω und verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel. Ist der Körper Ω konvex? (Kurze Begründung!)
   (b) Begründen Sie kurz, dass Ω höchstens vier Symmetrietransformationen besitzen kann.
   (c) Ermitteln Sie Symm(Ω), d.h. finden Sie alle vier Symmetrietransformationen von Ω. („Typ“ gemäss Liste im Skript auf S. 93 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)
   (d) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf.
   (e) Mit den Elementen aus Symm(Ω) ergänzt durch die Ebenenspiegelung S_E (die Ebene E geht durch A, B, C, D) wird die Symmetriegruppe Symm($\tilde{\Omega}$) erzeugt. Welche Elemente umfasst Symm($\tilde{\Omega}$) zusätzlich zu Symm(Ω)?

5. [11P.] Der Kreis k mit Radius 1, Mittelpunkt $(0, 1, 0)$, der parallel zur (x, z)-Ebene verläuft, wird an der z-Achse Punkt für Punkt gespiegelt. Verbindet man jeden Punkt A des Kreises k mit dem entsprechenden Spiegelpunkt $\tilde{A}$ entsteht durch die Schar dieser Verbindungslinien eine **Fläche** S.

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem den Kreis k sowie die Fläche S mithilfe einiger Verbindungslinien. Wie verlaufen die Verbindungslinien in Bezug zur z-Achse?
   (b) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Fläche S mit den Parametern φ und t.
   (c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)



Figur 4 (Aufgabe 3)



Figur 5 (Aufgabe 4)

1 (a)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\mathbb{C}_3$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_1$	"$\mathbb{D}_\infty$"	$\mathbb{C}_4$

5P

(b) Grosse Rechteckseite: a, Quadratseite: q

$$\underbrace{a(a-q)}_{\text{Rechteckfläche}} = \underbrace{q^2}_{\text{Quadratfläche}} \leftrightarrow a^2 - aq - q^2 = 0 \;\|:q^2$$

$$\left(\frac{a}{q}\right)^2 - \left(\frac{a}{q}\right) - 1 = 0$$

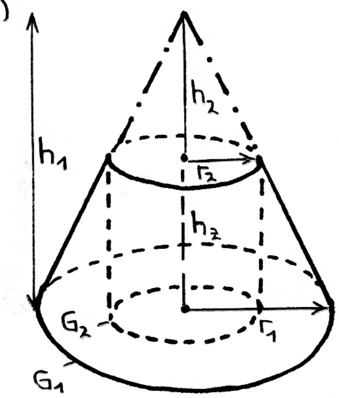
Setze: $x = \frac{a}{q}$: $\quad x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\right)$

kommentar: Verhältnis des GS

4 Goldene Rechtecke: QAXY, QAOZ, QBPY, OCPX

5P

(c)



Der ganze Kegel (V_1) ist eine massstäbliche Vergrösserung des oberen Teilkegels (V_2).

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{1}{4} \text{ (Flächenfaktor)} \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ Längenfaktor}: \quad r_2 = \frac{1}{2} r_1$$

$$h_2 = \frac{1}{2} h_1, \quad h_z = \frac{1}{2} h_1$$

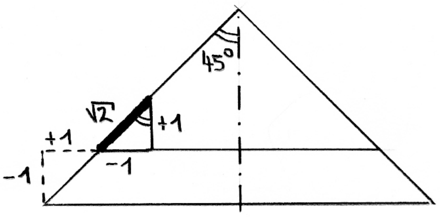
$$V_1 = \frac{1}{3} G_1 h_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1, \quad V_2 = \frac{1}{3} G_2 h_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}G_1\cdot\frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}V_1$$

$$V_z = G_2 \cdot h_z = \frac{1}{4}G_1\cdot\frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}G_1 h_1 = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}G_1 h_1 = \frac{3}{8}V_1$$

$$V_{\text{Hohlkörper}} = V_1 - V_2 - V_z = V_1 - \frac{1}{8}V_1 - \frac{3}{8}V_1 = \frac{4}{8}V_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}V_1}}$$

5P

(d)



Kreis k mit Radius 5 und Mittelpunkt (0,0,0): $\underline{\underline{\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi \\ 5\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$

Radiale Abweichungen bez. 5: $\mp\sqrt{2}\sin 45° = \mp 1 \rightsquigarrow r(\varphi) = 5 - \sin(5\varphi)$ (5 Wiederholungen)

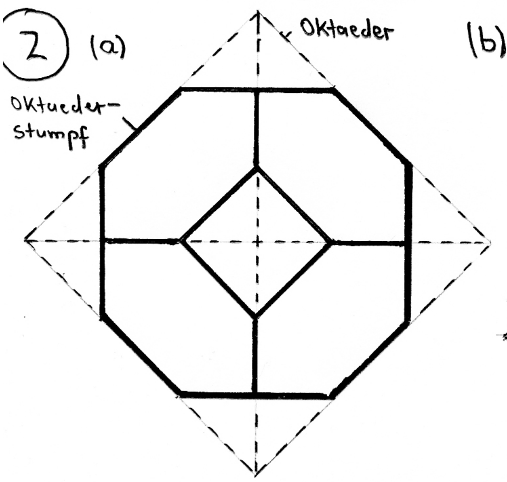
z-Abweichungen bez. 0: $\pm\sqrt{2}\cos 45° = \pm 1 \rightsquigarrow z(\varphi) = \sin(5\varphi)$

$$\underline{\underline{\gamma: \varphi \mapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} (5-\sin(5\varphi))\cos\varphi \\ (5-\sin(5\varphi))\sin\varphi \\ \sin(5\varphi) \end{pmatrix}}} \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$$

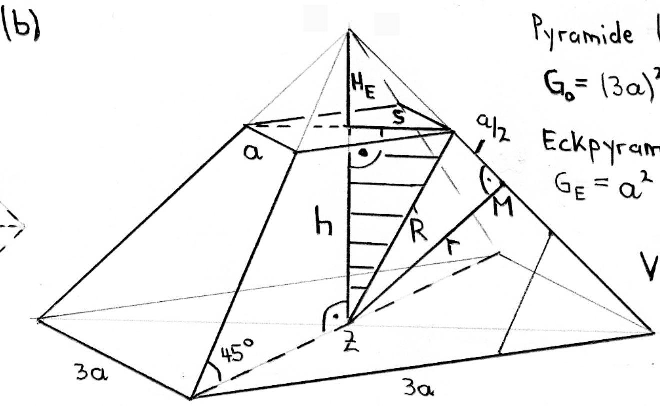
5P

---

2 (a)



(b)



Pyramide (halbes Oktaeder)

$G_0 = (3a)^2 = 9a^2, \; H_0 = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ (45°-90°-Dreieck)

Eckpyramide:

$G_E = a^2, \; H_E = \frac{a}{\sqrt{2}} \; \left(= \frac{1}{3}H_0\right)$

$$V = 2V_0 - 6V_E = 2\cdot\frac{1}{3}G_0 H_0 - 6\cdot\frac{1}{3}G_E H_E$$
$$= \frac{2}{3}9a^2\frac{3a}{\sqrt{2}} - 2a^2\frac{a}{\sqrt{2}}$$
$$= 9\sqrt{2}a^3 - \sqrt{2}a^3 = \underline{\underline{8\sqrt{2}a^3}}$$

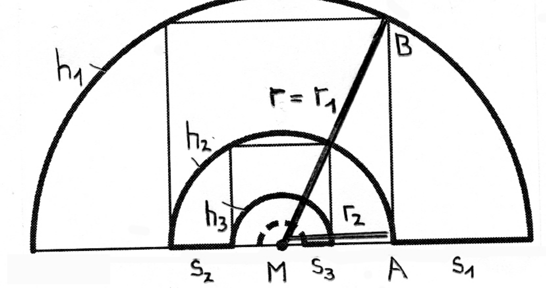
(c) Im markierten rechtwinkligen Dreieck gilt: $h = \frac{3a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}a = \sqrt{2}a$, $s = H_E = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$R = \sqrt{h^2 + s^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}a^2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{5}{2}}a = \frac{a}{2}\sqrt{10}}}$$

(d) Ja. Jede Verbindung vom Zentrum Z mit einer Kantenmitte M führt zu einem rechtwinkligen Dreieck mit Hyp. R und Kath. $a/2$: $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot 10 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}a}}$

(e) Ein <u>Würfel</u> mit Kantenlänge $2h = \underline{\underline{2\sqrt{2}a}}$

3 Im ⊾ΔMAB: $r_1^2 = \underbrace{r_2^2}_{|MA|} + \underbrace{(2r_2)^2}_{|AB|} = 5r_2^2 \rightsquigarrow r_1 = \sqrt{5}\, r_2$, $\quad r_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} r_1$, $\quad s_1 = r_1 - r_2 = r_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} r_1 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1$



Jeder nachfolgende Radius $r_3, r_4, \ldots$ ist eine massstäbliche Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$L = h_1 + s_1 + h_2 + s_2 + \ldots = \pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 + \pi \underbrace{r_2}_{\frac{1}{\sqrt{5}} r_1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \underbrace{r_2}_{\frac{1}{\sqrt{5}} r_1} + \ldots$$

$$= \pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\left[\pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 + \ldots\right]}_{L}$$

$$\rightsquigarrow L - \frac{1}{\sqrt{5}} L = \pi r_1 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) r_1 \quad \| \cdot \sqrt{5}$$

$$L(\sqrt{5}-1) = r_1(\pi\sqrt{5} + \sqrt{5} - 1) \qquad L = \frac{\pi\sqrt{5}+\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\, r_1 \quad (= 6.68 \cdot r)$$

---

4 (a) Anzahl Ecken: $e = 9$, Anzahl Kanten: $k = 20$, Anzahl Flächen: $f = 13$ $\rightarrow e - k + f = 2$ (stimmt)

Körper Ω ist nicht konvex, denn $F, G \in \Omega$ aber Strecke FG verläuft nicht ganz in Ω

(b) A kann durch eine ST von Ω höchstens nach A, B, C, D (4 Mögl.keiten) abgebildet werden. S muss Fixpt sein. Das Bild von F (ebenso E, B, ...) ist dann eindeutig festgelegt (1 Mögl.keit) $\rightsquigarrow 4 \cdot 1 = 4$ Mögl.keiten

(c) I Identität, $R_{a,90°}$, $R_{a,180°}$, $R_{a,270°}$ (Rotationsachse a steht senkrecht zu ABCD und geht durch S)

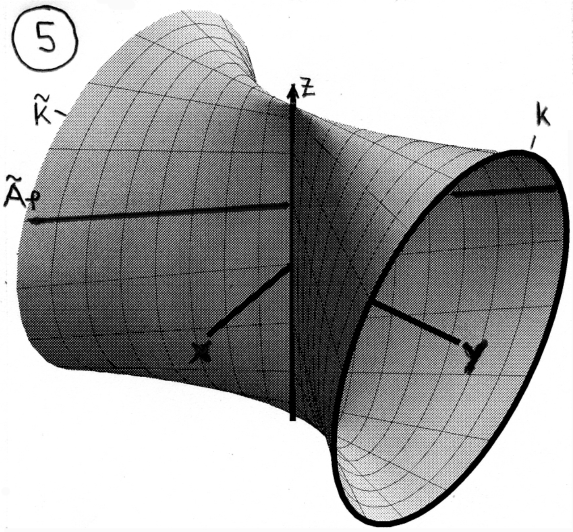
(d)

∘	I	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$
I	I	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$
$R_{90°}$	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	I
$R_{180°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	I	$R_{90°}$
$R_{270°}$	$R_{270°}$	I	$R_{90°}$	$R_{180°}$

(e) Idee: Ω durch an E gespiegeltes Bild zum Körper $\tilde{\Omega}$ ergänzen!

zusätzliche ST: S_E, $\underbrace{S_E \circ R_{90°},\ S_E \circ R_{180°},\ S_E \circ R_{270°}}_{\text{Drehspiegelungen}}$

5



(a) Die Verbindungslinien schneiden die z-Achse senkrecht

(b)

$$k: \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \rightarrow \text{Punkt } A_\varphi \text{ auf } k: A_\varphi = (\cos\varphi, 1, \sin\varphi)$$

Spiegelpunkt $\tilde{A}_\varphi$: $\tilde{A}_\varphi = (-\cos\varphi, -1, \sin\varphi)$, $\overrightarrow{A_\varphi\tilde{A}_\varphi} = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für einen Flächenpunkt auf der Verbindungslinie $A_\varphi\tilde{A}_\varphi$ gilt:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA_\varphi} + t\,\overrightarrow{A_\varphi\tilde{A}_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2\cos\varphi \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot (1-2t) \\ 1-2t \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\text{Fläche } S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} (1-2t)\cos\varphi \\ 1-2t \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix}$$

(c) S entsteht durch Bewegung eines Geradenstücks (der eine Endpt. auf k, der andere auf $\tilde{k}$) $\rightsquigarrow$ Schar gerader Linien
S ist Regelfläche (Konoid)

(d) $x = (1-2t)\cos\varphi$, $y = (1-2t)$, $z = \sin\varphi$ $\Big\}$ $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + z^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \quad \| \cdot y^2 \qquad x^2 + y^2 z^2 = y^2$

$\cos\varphi = \frac{x}{(1-2t)} = \frac{x}{y}$

(e)

$$\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -(1-2t_0)\sin\varphi_0 \\ 0 \\ \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} -2\cos\varphi_0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -(1-2t_0)\sin\varphi_0 \\ 0 \\ \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2\cos\varphi_0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi_0 \\ -2\cos^2\varphi_0 \\ (2-4t_0)\sin\varphi_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -(1-2t_0)\sin\varphi_0 & & -2\cos\varphi_0 \\ 0 & & -2 \end{matrix}$$

ändert i.allg mit t

Nicht abwickelbar! Richtung von $\vec{n}$ ändert entlang horizontaler t-Linie (Verbindungslinie)