ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Winter 2011
Dozent
Dr. M. Leupp

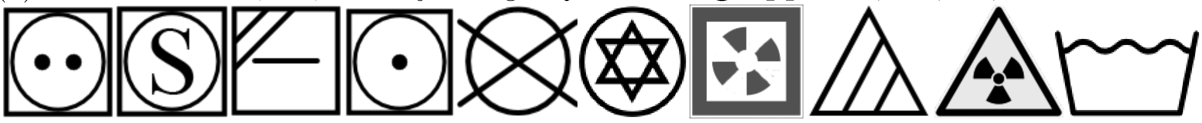
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.

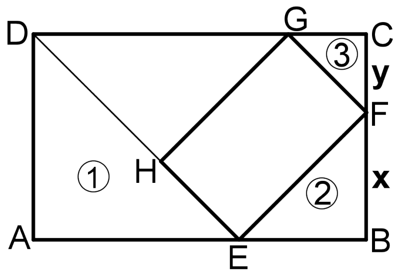


(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

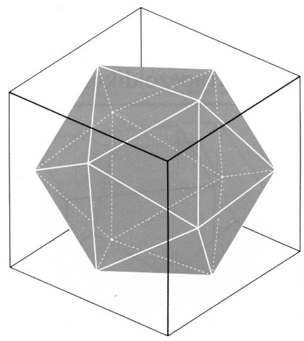
   (b) In Figur 1 ist das **Rechteck** $ABCD$ eine massstäbliche Vergrösserung des Rechtecks $EFGH$. Die Dreiecke ①, ②, ③ sind gleichschenklig! F teilt BC in Abschnitte der Längen x und y. Berechnen Sie das Verhältnis $x : y$. Kommentar zum Verhältniswert?

   (c) Ein **Würfel**, ein reguläres **Tetra-**, **Okta-** und **Ikosaeder** stehen je ausbalanciert mit einer Kante auf dem Boden. (Figur 2 zeigt z. B. ein solches Ikosaeder.) Skizzieren Sie die vier Körper in der **Ansicht von oben** (d.h. in der Blickrichtung senkrecht zum Boden). (Achten Sie in Ihren Skizzen auf korrekte Winkel & Proportionen.)

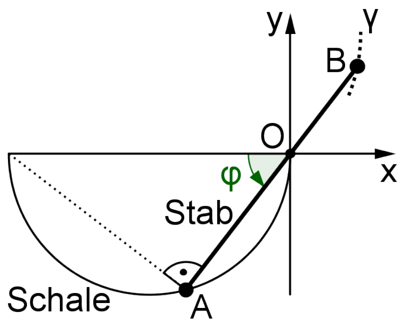
   (d) Der Inhalt eines randvollen, kegelförmigen Kelches wird in ein **kegelförmiges Glas** von doppeltem Radius und halber Höhe umgeleert. Bis zu welchem Bruchteil der Glashöhe steht die Flüssigkeit im Glas?



Figur 1 (Aufgabe 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1c)



Figur 3 (Aufgabe 2)

2. [9P.] Ein **Stab** AB der Länge 8 [cm] liegt mit dem Punkt A im Innern einer halbkreisförmigen Schale (Radius 4 [cm]) auf und ragt über den Rand O der Schale hinaus (Figur 3). Wenn A in der Schale verschoben wird, bewegt sich B entlang einer Kurve γ.

   (a) Skizzieren Sie γ mithilfe der Punkte B zu den Winkeln φ: 0°, 30°, 45°, 60°, 75°.
   (D.h. A liegt auf dem Halbkreis, sodass $\sphericalangle(\text{negative } x\text{-Achse}, AO) = \varphi$ und AB via O Länge 8 [cm] hat)

   (b) Wie lautet eine Parameterdarstellung von γ? (Bestimmen Sie dazu die Koordinaten x und y von B als Funktionen von φ.)

   (c) Zeigen Sie, dass γ auch durch die Parameterdarstellung $t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -8t^2 + 8t \\ (8-8t)\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ beschrieben wird. (Tipp: Setzen Sie in Teilaufgabe (b) $t = \cos\varphi$ mit $0 \leq t \leq 1$)

   (d) Für welchen Parameterwert t liegt der Punkt B am weitesten rechts? Wie gross ist dann der x-Wert von B?

3. [11P.] Die Flächenmitten B, C, D, E, F, H und die Ecken A, G des abgebildeten Würfels der Kantenlänge $2a$ bilden die Ecken des **Polyeders** $ABCDEFGH$ (Figur 4).

(a) Skizzieren Sie das Dreieck STG und darin die Punkte B, F, G, C. (Blickrichtung senkrecht auf die Fläche STG) Was für eine Figur bilden B, F, G, C? (Seitenlängen und Innenwinkel angeben)
(b) Wie gross ist die Oberfläche des Polyeders (ausgedrückt durch a)?
(c) Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel. Ist das Polyeder kombinatorisch regulär? (Kurze Begründung)
(d) Was für ein Körper entsteht, wenn vom Polyeder die Dreieckspyramiden $CFHG$ und $BEDA$ abgeschnitten werden?
(e) Berechnen Sie das Volumen des Polyeders (ausgedrückt durch a).

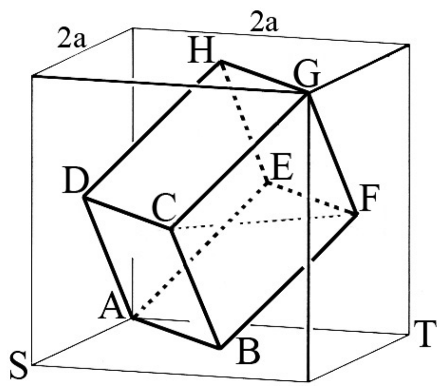
4. [9P.] Bezeichne Ω den abgebildeten **Dreieckkörper** (Figur 5). Er wird begrenzt durch kongruente, gleichseitige Dreiecke. Die Färbung ist zu berücksichtigen!

(a) Begründen Sie kurz, dass Ω höchstens sechs Symmetrietransformationen besitzen kann.
(b) Ermitteln Sie Symm(Ω), d.h. finden Sie alle sechs Symmetrietransformationen von Ω. („Typ" gemäss Liste im Skript auf S. 93 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)
(c) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf. (Der rechte, obere Teil der Tafel bis und mit der Diagonalen genügt! Schreiben Sie in der Kopfzeile der Tafel zuerst die drei orientierungstreuen, dann die drei nicht orientierungstreuen Symmetrietransformationen.)
(d) Welche Symmetrietransformationen umfasst die Symmetriegruppe des Dreieckkörpers zusätzlich, wenn die Färbung *ignoriert* wird?

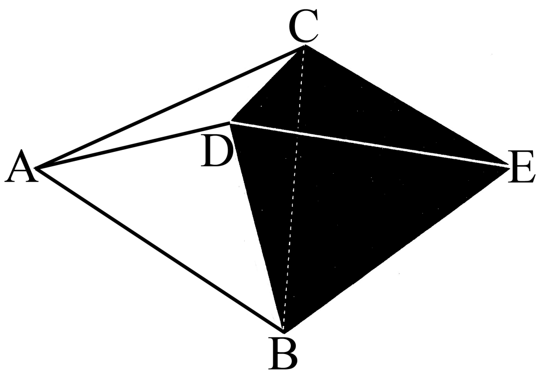
5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi - t\sin\varphi \\ \sin\varphi + t\cos\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ -1 \leq t \leq 1)$$

(a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Kurve γ (φ-Linie zu $t = 0$).
Leiten Sie ferner die Koordinatengleichung „$x^2 + y^2 = \ldots$" der φ-Linie zu $t = 1$ her.
Um was für Kurven handelt es sich je? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)
(b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien (insbesondere die t-Linie zu $\varphi = 0$). Was für Kurven sind die t-Linien?
(c) Ist S eine Regelfläche? Ist S abwickelbar? (Kurze Begründungen ohne Rechnungen)
(d) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$.
(e) Die t-Linie durch den Punkt $A = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, 0)$ (A liegt auf γ) schliesst mit dem Vektor $\vec{OA}$ (O ist der Ursprung) einen festen Winkel ein. Wie gross ist dieser?



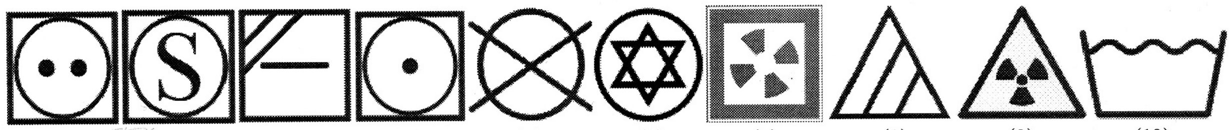
Figur 4 (Aufgabe 3)



Figur 5 (Aufgabe 4)

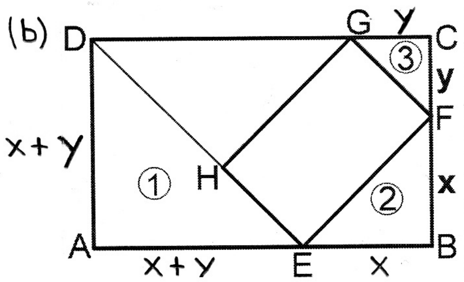
1

(a)



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{C}_4$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_3$	$\mathbb{D}_1$

(b)



$|GF| = \sqrt{y^2+y^2} = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}\,y \xrightarrow{\cdot\lambda} |BC| = x+y$ (massstäbl. Vergrösserung)

$|EF| = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x \rightsquigarrow |AB| = x+y+x$

$$\lambda = \frac{x+y}{\sqrt{2}\,y} = \frac{x+y+x}{\sqrt{2}\,x} \leftrightarrow x^2+xy = xy+y^2+xy \;\|-2xy-y^2$$

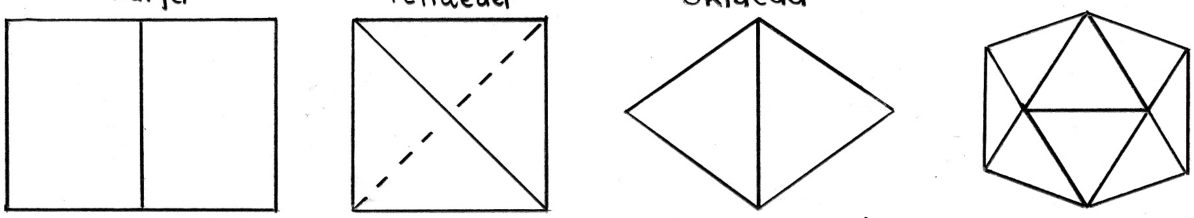
$$x^2-xy-y^2 = 0 \;\| : y^2$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ Setze $\tau = \frac{x}{y}$ (oder $y=1$): $\tau^2-\tau-1=0 \rightsquigarrow \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

Kommentar: Verhältnis des GS!

(c)

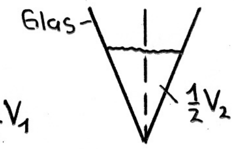
Würfel | Tetraeder | Oktaeder | Ikosaeder



Umriss: (Rechteck) | (Quadrat) | (Parallelogramm)

(d) Volumen Kelch: $V_1 = \frac{\pi}{3}R^2H$

Volumen Glas: $V_2 = \frac{\pi}{3}(2R)^2\frac{H}{2} = 2V_1$

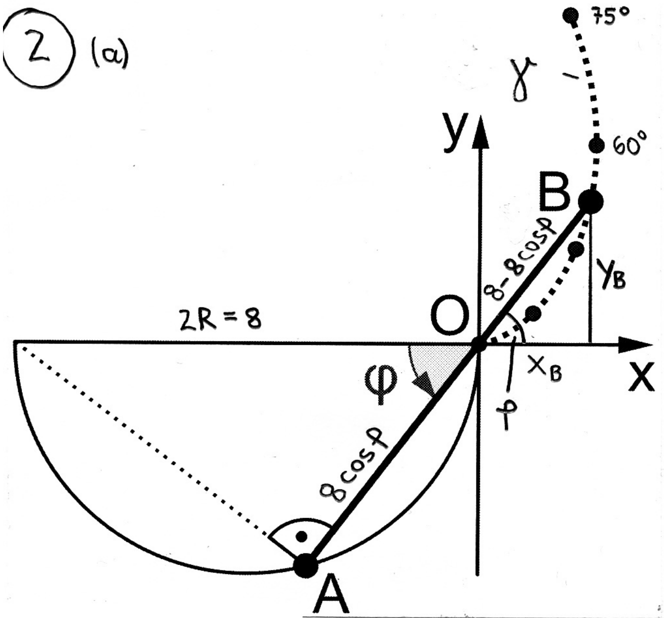


Volumenfaktor: $\frac{1}{2} = \lambda^3$

Längenfaktor: $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0.7937 \approx 80\%$ der Glashöhe

2

(a)



(b) $x_B = |OB|\cos\rho = (8-8\cos\rho)\cos\rho$ $(0 \leq \rho \leq 90°)$

$y_B = |OB|\sin\rho = (8-8\cos\rho)\sin\rho$

$$\gamma:\ \rho \mapsto \vec{r}(\rho) = \begin{pmatrix} 8\cos\rho - 8\cos^2\rho \\ (8-8\cos\rho)\sin\rho \end{pmatrix}$$

(c) $t = \cos\rho$, $\sin\rho = \sqrt{1-\cos^2\rho} = \sqrt{1-t^2}$

$$\gamma:\ t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 8t-8t^2 \\ (8-8t)\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

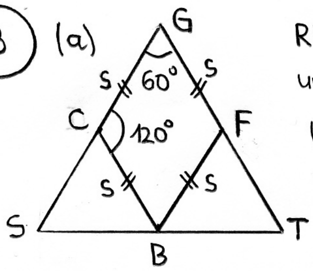
(d) Im Punkt am weitesten rechts ist $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ vertikal, d.h. $= \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix} \neq 0$

$0 \overset{\text{Soll}}{=} x'(t) = (8t-8t^2)' = 8-8\cdot 2t \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$

$x\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\frac{1}{2} - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{2}}$ (das ist bei $\rho = 60°$!)

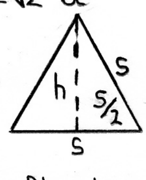
3

(a)



Rhombus (Raute) mit Seitenlänge $s = \frac{1}{2}|SG| = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4}\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot a$ und Winkel 60° bzw. 120°

(b) Oberfläche $O = 6F_{\#} = 12F_{\Delta}$ mit $F_{\Delta} = \frac{1}{2}s\cdot\underbrace{\sqrt{s^2-\frac{s^2}{4}}}_{h} = \frac{1}{2}s\sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$



$= 12\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \underline{\underline{6\sqrt{3}a^2}}$

(c) $e=8$, $f=6$, $k=12$ $e-k+f = 8-12+6 = 2$ ✓ Komb. regulär < lauter Rhomben, lauter 3-kantige Ecke

(d) reg. Oktaeder

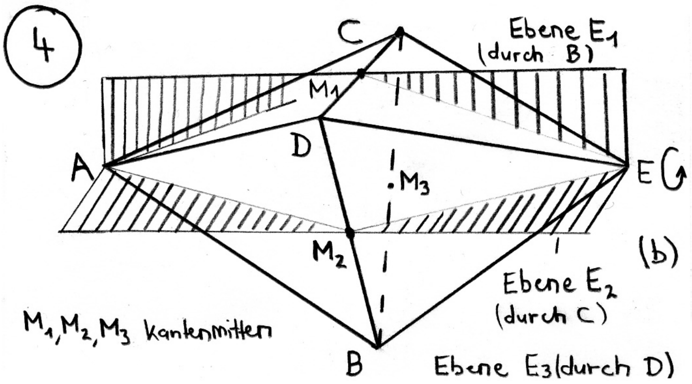
(e) Volumen $V = V_{Okt} + 2V_{Tetra}$ mit $V_{Okt} = 2\cdot\frac{1}{3}s^2\cdot a = 2\cdot\frac{1}{3}(\sqrt{2}a)^2a = \frac{4}{3}a^3$

$V_{Tetra} \overset{*}{=} \frac{\sqrt{2}}{12}s^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}(\sqrt{2}a)^3 = \frac{1}{3}a^3$ (*Skript S.61)

$= \frac{4}{3}a^3 + 2\cdot\frac{1}{3}a^3$

$= \underline{\underline{2a^3}}$

4



(a) B kann durch eine Symm.trsf des schwarz-weissen Dreieckskörpers höchstens nach B, C, D (3 Mögl.) abgebildet werden. Für das Bild der Nachbarecke C von B kommen höchstens C und D in Frage (2 Mögl.). Das Bild von D ist dann eindeutig festgelegt. A und E sind Fixpunkte (dreikantig, versch. Färbung) $\rightsquigarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Mögl.

(b) I Identität, R_1 Rotation um $\overrightarrow{AE}$ um $120°$
R_2 " " " $240°$
S_1 Spiegelung an Ebene E_1, S_2 an E_2, S_3 an E_3

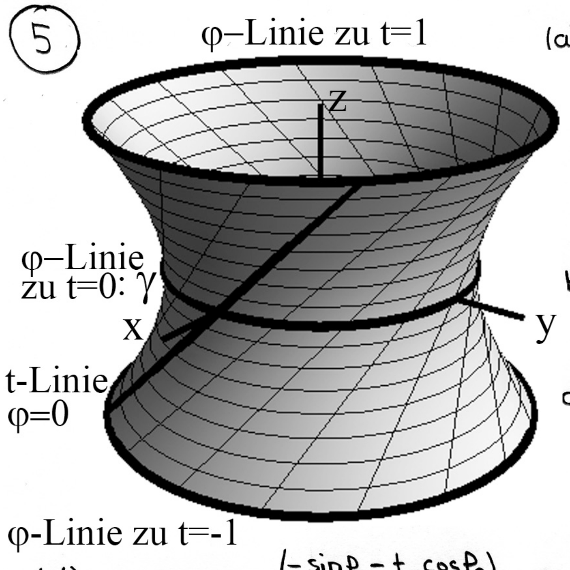
(c) 1. Zeile $\hat{=}$ Kopfzeile

I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
	R_2	I	S_3	S_1	S_2
		R_1	S_2	S_3	S_1
			I	R_1	R_2
				I	R_1
					I

(d) Weitere 6 Symmetrietransformationen (insgesamt 12)

R_3 Rotation um $\overrightarrow{BM_1}$ um $180°$	S_4 Spiegelung an Ebene E durch B, C, D	
R_4 " $\overrightarrow{CM_2}$ um $180°$	DS_1 Drehspiegelung	$S_4 \circ R_1$
R_5 " $\overrightarrow{DM_3}$ um $180°$	DS_2 "	$S_4 \circ R_2$

5



(a) $t=0: \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ Kreis mit Mittelpt. (0,0,0) und Radius 1 in der (x,y)-Ebene

$\sin^2(\cdot)+\cos^2(\cdot)=1$

$t=1: \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi \\ \sin\varphi + \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = x \\ = y \\ = z \text{ konst.} \end{matrix}$ $\quad x^2+y^2 = \cos^2\varphi - \cancel{2\cos\varphi\sin\varphi} + \sin^2\varphi + \sin^2\varphi + \cancel{2\sin\varphi\cos\varphi} + \cos^2\varphi \overset{!}{=} 2$

Kreis mit Mittelpt. (0,0,1) und Radius $\sqrt{2}$ parallel zur (x,y)-Ebene

b) t-Linie: $\vec{r}(\varphi,t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$ t-Linien sind Geradenstücke (welche γ schneiden und von φ-Linie zu $t=1$ zu $t=-1$ verlaufen)

c) S entsteht durch Bewegung einer Geraden (z.B. t Linie zu $\varphi=0$) entlang $\gamma \rightarrow$ Schar gerader Linien, S ist Regelfläche
S ist nicht abwickelbar (Drehung der Tangentialebene entlang der hervorgehobenen t-Linie)

(d) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 - t_0\cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 - t_0 \sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 - t_0\cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 - t_0\sin\varphi_0 \\ 0 \\ -\sin\varphi_0 - t_0\cos\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 - t_0\sin\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 1 \\ -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 - t_0\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 + t_0\cos\varphi_0 \\ ⊛\ -t_0 \end{pmatrix}$

$⊛\ \cancel{-\sin\varphi_0\cos\varphi_0} - t_0\cos^2\varphi_0 + \cancel{\sin\varphi_0\cos\varphi_0} - t_0\sin^2\varphi_0 = -t_0\underbrace{(\cos^2\varphi_0 + \sin^2\varphi_0)}_{=1}$

(e) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Richtung der t-Linie durch A (d.h. $\varphi = \varphi_0$) $\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{t} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ \cos\varphi_0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\cos\varphi_0\sin\varphi_0 + \sin\varphi_0\cos\varphi_0 = 0$

$= 0$, d.h. $\sphericalangle(\underset{\neq \vec{0}}{\overrightarrow{OA}}, \underset{\neq \vec{0}}{\vec{t}}) = \underline{\underline{90°}}$