Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

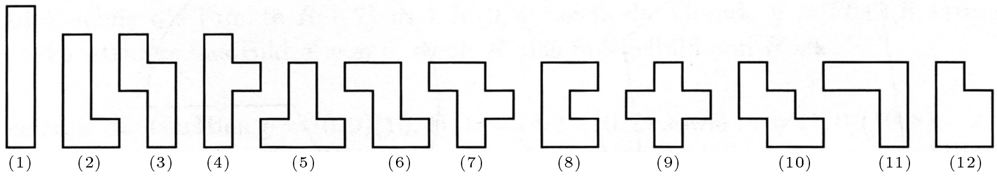
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

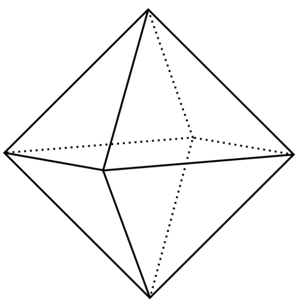
   (a) Geben Sie zu den abgebildeten **Pentominos** (Figuren aus 5 Häuschen) die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.



   (b) Ein reguläres **Oktaeder** wird durch gleichseitige Dreiecke begrenzt (Figur 1). Verbindet man die Mitten (Schwerpunkte) aller benachbarten Dreiecke, entsteht ein Innenkörper. (Bem: Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie, hier die Seitenflächenhöhe, im Verhältnis 2:1.) (b1) Um was für einen Körper handelt es sich? (b2) Wie gross ist das Verhältnis der Volumeninhalte vom Innenkörper zum ursprünglichen Oktaeder?

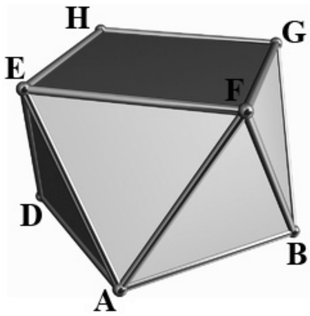
   (c) Zeigen Sie unabhängig voneinander folgende 2 Eigenschaften der **Fibonacci-Zahlen** $f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots\ (n \in \mathbb{N})$ Tipp: Für die Fibonacci-Zahlen gilt $f_n + f_{n+1} = \ldots$ z.B. $f_1 + f_2 = \ldots$)
   Eigenschaft ①: $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - f_1$
   Eigenschaft ②: $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1} - f_0 f_1$ mit $f_0 = f_2 - f_1$

   (d) Die gläserne Kuppel des Berliner Reichstags hat die Form eines **Drehellipsoids** (Figur 2): Der Grundkreisradius misst $a = 19$m, die Scheitelhöhe der Kuppel $b = 23.5$m, bez. der vertikalen Achse besteht Drehsymmetrie. Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung (d1) des Grundkreises, (d2) der Aufrisshalbellipse und (d3) der Kuppelfläche.



Figur 1 (Aufgabe 1b)

Figur 2 (Aufgabe 1d)



Figur 3 (Aufgabe 2 & 3)

2. [10P.] Ein n-seitiges, **regelmässiges Antiprisma** besitzt als Grund- und Deckfläche zwei kongruente, parallel übereinander liegende, reguläre n-Ecke, welche gegeneinander um $\frac{180°}{n}$ verdreht sind. Die Seitenflächen sind kongruente, *gleichseitige* Dreiecke mit Seitenlänge a.

   (a) Skizzieren Sie das quadratische Antiprisma in Figur 3 in der Ansicht von oben.

   (b) Skizzieren Sie es nun von vorne (Blickrichtung parallel zur Grundfläche senkrecht zu EF).

   (c) Berechnen Sie die Höhe (d.h. den Abstand zwischen Grund- & Deckquadrat) für $a = 2$.
   Betrachten Sie dazu die Schnittfigur mit der Ebene durch D, B und die Kantenmitten von FG, EH.

   (d) Das quad. Antiprisma hat eine Umkugel. Berechnen Sie den Umkugelradius ($a = 2$).

   (e) Betrachten Sie nun ein 6-seitiges, regelmässiges Antiprisma und berechnen Sie die Höhe (d.h. den Abstand zwischen der 6-eckigen Grund- und Deckfläche) für $a = 2$.

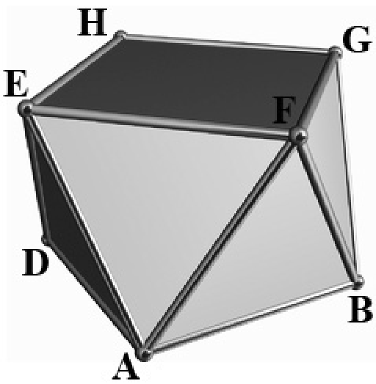
Bitte wenden!

3. [11P.] Bezeichne Ω das abgebildete **quadratische Antiprisma** (Figur 3). Der Körper wird begrenzt von zwei kongruenten Quadraten und acht kongruenten, *gleichseitigen* Dreiecken.

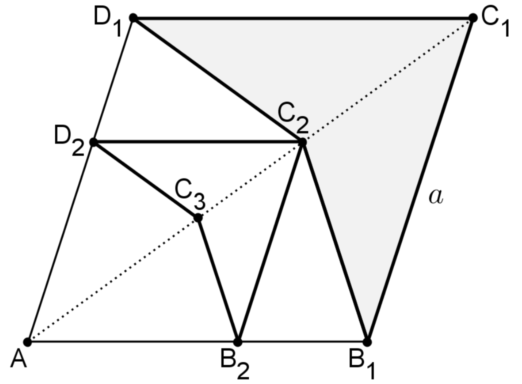
(a) Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel für das quadratische Antiprisma.
(b) Begründen Sie kurz, dass Ω höchstens 16 Symmetrietransformationen besitzen kann.
(c) Wählen Sie vier Symmetrietransformationen von Ω aus, die eine *Gruppe* bilden (vierelementige Untergruppe von Symm(Ω)) und stellen Sie die zugehörige Gruppentafel auf.
(d) Ermitteln Sie alle acht *nicht orientierungstreuen* Symmetrietransformationen von Ω. („Typ" gemäss Liste im Skript auf S. 93 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)
(e) Ermitteln Sie alle acht *orientierungstreuen* Symmetrietransformationen (Rotationen!) von Ω. (Achse und Drehwinkel angeben/beschreiben)

4. [8P.] Zwei **Goldene Dreiecke** AB_1C_2 und AC_2D_1 mit Schenkellänge a werden aneinander gelegt und zu einem **Rhombus** (gleichseitiges Parallelogramm) ergänzt (Figur 4). $AB_1C_2D_1$ heisst *Drache*, die grau markierte Figur heisst *Pfeil*. Ausgehend von C_2 lassen sich wiederum Drache und Pfeil zeichnen, ebenso von C_3 und so weiter ad infinitum. (Drache und Pfeil wurden 1974 vom berühmten Mathematiker R. PENROSE verwendet, um die wichtigen Penrose-Parkette zu bilden.)

(a) Zeigen Sie, dass für die Länge der Diagonale AC_1 gilt: $|AC_1| = \phi\, a$ mit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(Benutzen Sie dazu, dass das Dreieck $B_1C_1C_2$ eine massstäbliche Verkleinerung des Dreiecks AB_1C_1 ist.)
(b) Berechnen Sie die Summe der Umfänge aller unendlich vielen Pfeile (ausgedrückt durch a) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit". (Die Endlichkeit der Gesamtlänge sei vorausgesetzt.)
(c) Wieviel Prozent macht der grau markierte Pfeil vom Flächeninhalt des Rhombus aus? (Benutzen Sie dazu, dass das Dreieck $B_1C_1C_2$ eine massstäbliche Verkleinerung des Dreiecks AB_1C_1 ist!)



Figur 3 (Aufgabe 2 & 3)



Figur 4 (Aufgabe 4)

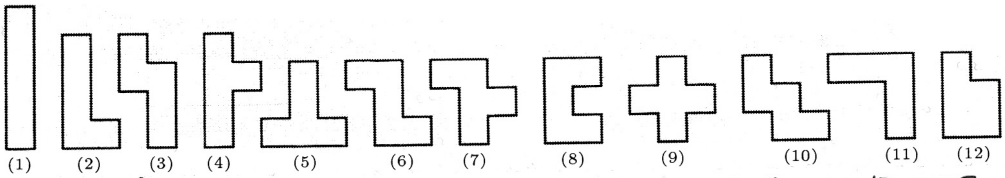
5. [11P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 1+\sin\varphi - 2t \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1)$$

(a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die φ-Linien zu $t=0$ und $t=1$. Um was für Kurven handelt es sich? (Genaue Angabe der wesentlichen Elemente)
(b) Skizzieren Sie in das gleiche Koordinatensystem die Fläche S mithilfe einiger t-Linien. Was für Kurven sind die t-Linien?
(c) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
(d) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
(e) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$. Ist S abwickelbar? (Kurze Begründung mit dem soeben erhaltenen Resultat)

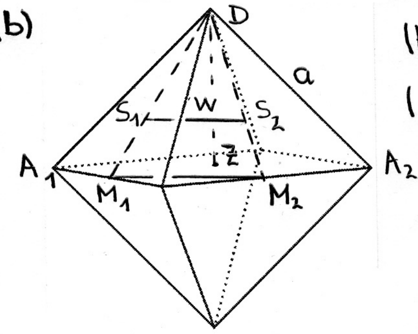
1

(a)



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
$\mathbb{D}_2$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{C}_2$	$\mathbb{C}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{D}_1$	$\mathbb{C}_1$

(b)



(b1) Würfel (Figur 2.9, Skript S.55)

(b2) $|M_1M_2| = \frac{1}{2}|A_1A_2| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$

$w = |S_1S_2| = \frac{2}{3}|M_1M_2| = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$ (ΔDS_1S_2 ist eine massstäbl. Verkl. des ΔDM_1M_2 mit Faktor $2/3$)

Volumen Würfel: $w^3 = \left(\frac{\sqrt{2}\,a}{3}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}\,a^3}{27}$

Volumen Oktaeder: $2V_{Pyram.} = 2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot|ZD| = 2\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{3}$

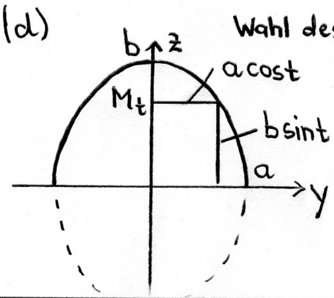
Volumenverhältnis: $\frac{2\sqrt{2}}{27}a^3 \Big/ \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = \underline{\underline{\frac{2}{9}}}$

(c) ① $\| + f_1 \rightsquigarrow$ $\underbrace{f_1+f_2}_{f_3} + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n}$ $= f_{2n+1}$ ✓

$f_3 \quad f_5 \quad f_7 \ldots \quad f_{2n+1}$

② $\| + f_1f_0$ $\quad \underbrace{f_1f_0 + f_1^2}_{f_2-f_1} + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = \underbrace{f_2f_1}_{f_3-f_2} - \cancel{f_1^2} + \cancel{f_1^2} + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = \underbrace{f_3f_2}_{f_4-f_3} - \cancel{f_2^2} + \cancel{f_2^2} + \ldots + f_n^2 = \underset{usw}{\ldots} = f_{n+1}f_n$

(d) Wahl des KS: Ursprung in Grundkreismittelpunkt, z-Achse $\hat{=}$ Symmetrieachse

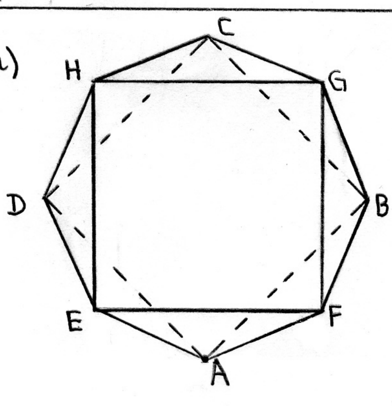


(d1) $\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a\cdot\cos\varphi \\ a\cdot\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ $\qquad$ (d2) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le t \le \pi$

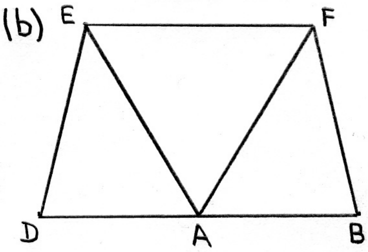
(d3) $\vec{r}(\varphi,t) = \begin{pmatrix} a\cos t\cos\varphi \\ a\cos t\sin\varphi \\ b\sin t \end{pmatrix}$ $\quad \left(0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$

2

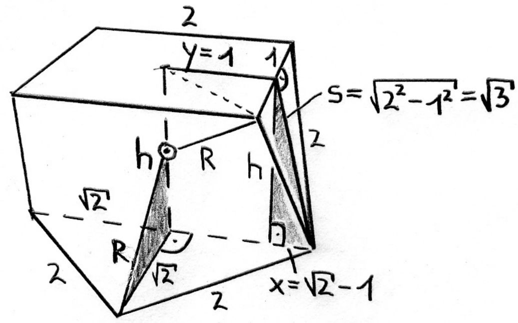
(a)



(b)

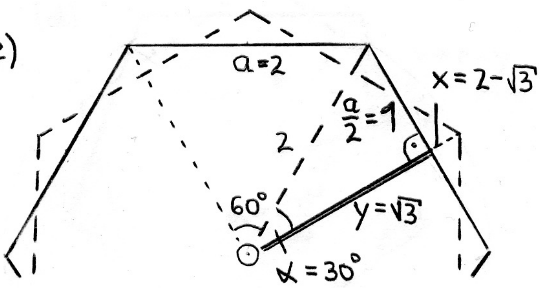


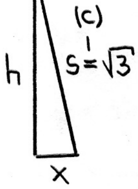
(c)



$h = \sqrt{s^2-x^2} = \sqrt{3-\underbrace{(\sqrt{2}-1)^2}_{(2-2\sqrt{2}+1)}} = \underline{\underline{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

(e)





wie in (c): $h = \sqrt{s^2-x^2} = \sqrt{3-\underbrace{(2-\sqrt{3})^2}_{(4-4\sqrt{3}+3)}} = \underline{\underline{\sqrt{4\sqrt{3}-4}}}$

(d) $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 = \frac{h^2}{4} + 2$

$= \frac{2\sqrt{2}}{4} + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

$R = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+2}}}$

③ (a) Ecken: $e = 8$, Kanten: $k = 16$, Flächen: $f = 10$ $\quad e-k+f = 8-16+10 = 2$ ✓

(b) A kann durch eine Symmetrietrsf. nach A, ..., H (8 Mögl.) abgebildet werden.
Für das Bild von B kommen nur 2 Nachbarecken des Bildes von A in Frage (2 Mögl.)
Das Bild von C (und allen weiteren Ecken) ist dann eindeutig festgelegt: $8 \cdot 2 \cdot 1 = 16$ Mögl.

(c) I Identität, R_1, R_2, R_3 Rotationen um Achse a um $90°, 180°, 270°$
(a = vertikale Achse durch die beiden Quadratmitten von unten n. oben)

$\circ$	I	R_1	R_2	R_3
I	I	R_1	R_2	R_3
R_1	R_1	R_2	R_3	I
R_2	R_2	R_3	I	R_1
R_3	R_3	I	R_1	R_2

(d) S_1, S_2, S_3, S_4 Ebenenspiegelungen an Ebenen E_1 (durch A und a)
E_2 (durch a und F), E_3 (durch a und B), E_4 (durch a, G)

SR_1, SR_2, SR_3, SR_4 Drehspiegelungen mit Drehachse a, Spiegel.ebene E
(= Mittelparallelebene zu ABCD & EFGH) mit $45°, 135°, 225°, 315°$

(e) I, R_1, R_2, R_3 aus (c) sowie Rotationen um $180°$ um die Achsen a_1, a_2, a_3, a_4
mit a_1 durch Mitte von BG und Mitte von DE, a_2 durch Mitte von BF und Mitte DH usw.

---

④ (a) Goldenes $\Delta AB_1C_2 \rightarrow$ Winkel $72°, 72°, 36°$ (Diagonalendreieck im reg. 5-Eck, Skript Fig 2.32) $\rightsquigarrow \dfrac{|AB_1|}{|B_1C_2|} = \phi \leftrightarrow |B_1C_2| = \dfrac{a}{\phi}$

$\Delta B_1C_1C_2$ ist massstäbl. Verkl. von ΔAB_1C_1: $\dfrac{|B_1C_1|}{|AC_1|} = \lambda = \dfrac{|B_1C_2|}{|AB_1|} = \dfrac{a/\phi}{a} = \dfrac{1}{\phi} \rightarrow |AC_1| = \phi|B_1C_1| = \phi \cdot a$

(b) $L = (2|B_1C_1| + 2|B_1C_2|) + (2|B_2C_2| + 2|B_2C_3|) + \ldots$

Der Rhombus $AB_2C_2D_2$ ist eine massstäbl. Verkl. des Rhombus $AB_1C_1D_1$ mit Faktor $\lambda = \dfrac{1}{\phi}$ usw.

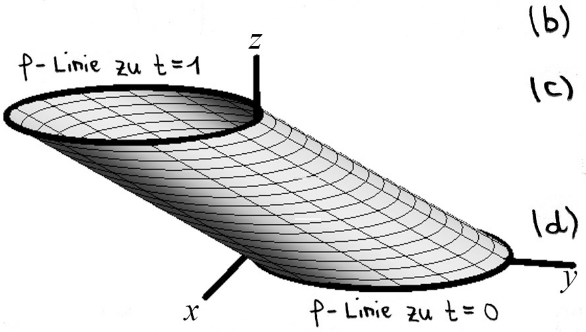
$L = 2a + 2 \cdot \dfrac{a}{\phi} + \dfrac{1}{\phi}(2|B_1C_1| + 2|B_1C_2|) + \ldots$

$L = 2a + \dfrac{2a}{\phi} + \dfrac{1}{\phi}L \quad \longleftrightarrow \quad L - \dfrac{1}{\phi}L = 2a + \dfrac{2a}{\phi} \;\|\cdot\phi \quad L\phi - L = 2a\phi + 2a \quad L = \underline{\underline{\dfrac{2a(\phi+1)}{\phi-1}}}$

(c) Längenfaktor: $\lambda = \dfrac{1}{\phi}$ Flächenfaktor: $\lambda^2 = \dfrac{1}{\phi^2}$ $\quad \dfrac{F_{Pfeil}}{F_\#} = \dfrac{2F_{\Delta B_1C_1C_2}}{F_\#} = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{\phi^2} F_{\Delta AB_1C_1}}{F_\#} = \dfrac{\frac{1}{\phi^2} F_\#}{F_\#} = 0.3820 = \underline{\underline{38.2\%}}$

---

⑤ (a) p-Linie zu $t=0$ bzw. $t=1$: Horizontaler Kreis mit Radius 1 um $(0,1,0)$ bzw. um $(0,-1,0)$, allg. horizontale Kreise mit $r=1$



(b) t-Linien sind Geradenstücke parallel zur (y,z)-Ebene

(c) S entsteht durch Parallelverschieben einer Geraden entlang den beiden Kreisen (oder einem davon) $\rightarrow$ Schar gerader Linien $\rightarrow$ ist Regelfläche (verallg. Zylinderfläche)

(d) $x = \cos p$, $y = 1 + \sin p - 2t = 1 + \sin p - 2z$, $z = t$
$\sin p = (y + 2z - 1)$
$\underline{1} = \cos^2 p + \sin^2 p = \underline{x^2 + (y+2z-1)^2}$

(e) $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(p_0) = \begin{pmatrix} -\sin p_0 \\ \cos p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{t} = \vec{r}\,'_{p_0}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin p_0 \\ \cos p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos p_0 \\ \sin p_0 \\ 2\sin p_0 \end{pmatrix}}}$

$\begin{matrix} -\sin p_0 \\ \cos p_0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix}$

$\vec{n}$ ist unabhängig von t, d.h. $\vec{n}$ ist konstant entlang der t-Linie $\rightsquigarrow$ abwickelbar