ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

Winter 2013
Dozent
Dr. M. Leupp

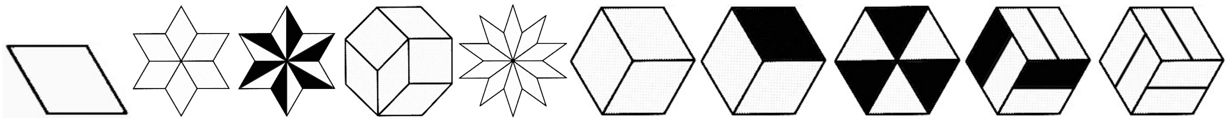
Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!** Zeit: 3 Std.

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungen u. alte Prüfungen mit Lösungen, elementarer Taschenrechner

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)

   (a) Geben Sie zu $1, \ldots, 10$ die jeweilige **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ an.

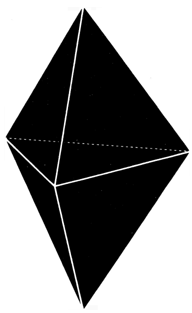


(1) Rhombus (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

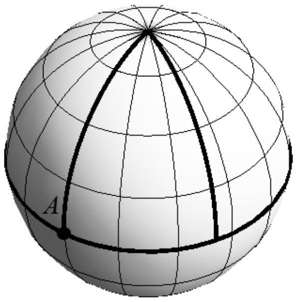
   (b) Der abgebildete **Dreieckskörper** entsteht durch Zusammenfügen von zwei regulären Tetraedern (Figur 1); er wird durch sechs gleichseitige Dreiecke begrenzt. Werden die beiden dreikantigen Ecken bis zu den jeweiligen Kantenmitten abgeschnitten, entsteht ein Dreieckskörperstumpf. (b1) Wie gross ist das Verhältnis der Volumeninhalte vom Dreieckskörperstumpf zum ursprünglichen Dreieckskörper? (b2) Wie gross ist das Verhältnis der Oberflächeninhalte?

   (c) Eine **Raupe** ist zur Zeit $t = 0$[h] in A am Äquator eines Globus mit Radius R (Figur2) und kriecht gleichmässig entlang des Längenhalbkreises in 24 [h] zum Nordpol.
   (c1) Führen Sie ein räumliches (festes) Koordinatensystem ein und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung der Bewegung bzw. der dadurch entstehenden Bahnkurve.
   (c2) Wie lautet eine Parameterdarstellung der Bewegung, wenn sich der Globus (analog zur Erde) während des Kriechens (in 24 [h]) um seine Achse dreht?

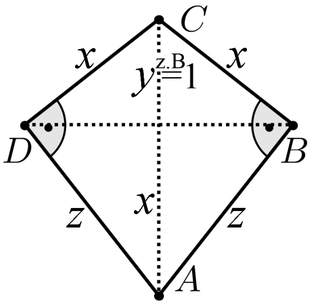
   (d) Im **rechtwinkligen Drachenviereck** $ABCD$ (Figur 3) teilt die kürzere Diagonale BD die längere Diagonale AC gerade so, dass der grössere Abschnitt x gleich gross wie die Seite BC ist. In welchem Verhältnis $x : y$ teilt dann BD die Diagonale AC?



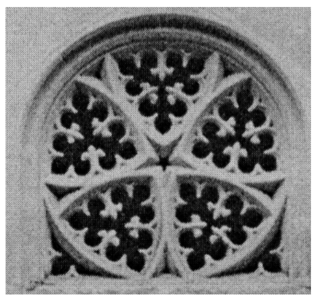
Figur 1 (Agb. 1b)



Figur 2 (Aufgabe 1c)



Figur 3 (Aufgabe 1d)



Figur Ω (Aufgabe 2)

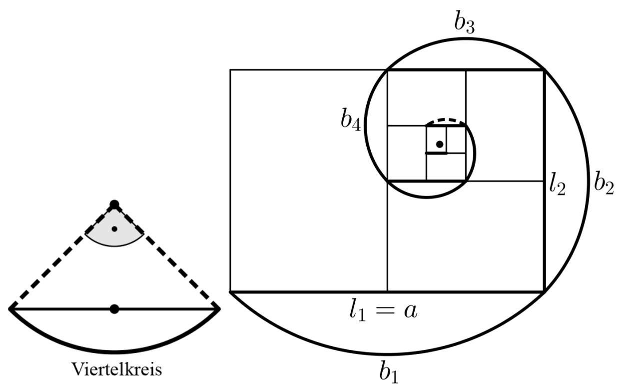
2. [10P.] Sei Symm(Ω) die Menge aller Symmetrietransformationen der (idealisierten) **Figur** Ω.
   (Ω ist ein Fenster der Zisterzienserabtei HAUTERIVE im Kanton Freiburg.)
   (a) Übertragen Sie Ω (vereinfacht, nur Kreisinneres) in Ihre Unterlagen & ermitteln Sie Symm(Ω).
   („Typ" gemäss Liste im Skript auf S. 80 und zugehörige bestimmende Elemente angeben/beschreiben)
   (b) Schreiben Sie von Symm(Ω) Kopfzeile und „Kopfspalte" der zugehörigen Gruppentafel auf und füllen Sie die zweite und die letzte Zeile der Tafel aus.
   (c) Nennen Sie eine Symmetriegruppe, die gleich viele Elemente wie Symm(Ω) umfasst, jedoch nicht die gleiche Symmetrie beschreibt.
   (d) Skizzieren Sie eine ebene Figur W, die weniger symmetrisch als Ω ist, sowie eine ebene Figur M, die symmetrischer als Ω ist.

3. [8P.] Die Rechtecke in Figur 4 entstehen durch fortgesetztes Halbieren und haben alle das Verhältnis *Länge* : *Breite* $= \sqrt{2} : 1$. Sie sind damit alle massstäbliche Verkleinerungen voneinander. Wird der Reihe nach über den jeweils angrenzenden Längsseiten dieser Rechtecke ein Viertelkreisbogen (siehe Figur 4 links) gezeichnet, entsteht die abgebildete „**Spirale**“.

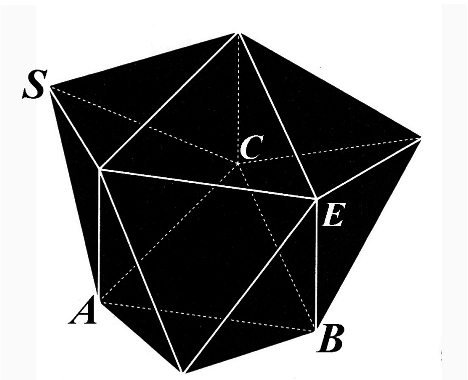
   (a) Berechnen Sie die Gesamtlänge $L = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots$ der „Spirale“ (ausgedrückt durch a) durch Ausnutzen der „Selbstähnlichkeit“. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)
   (b) Beschreiben Sie die Lage des Zentrums der „Spirale“ und begründen Sie Ihre Antwort.

4. [10P.] Figur 5 zeigt einen **Körper**, der aus lauter gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge a aufgebaut ist.

   (a) Der Körper stehe mit der Dreieckfläche ABC auf der Grundrissebene. Skizzieren Sie die Ansicht von oben. (Seitenlängen des Umrisses angeben)
   (b) Skizzieren Sie den „Querschnitt“, der entsteht, wenn der Körper mit der Ebene durch B, E und S geschnitten wird. (Seitenlängen des Umrisses angeben)
   (c) Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel. Ist der Körper regulär? Ist er kombinatorisch regulär? (Kurze Begründung angeben)
   (d) Wie gross ist der Volumeninhalt des Körpers (ausgedrückt durch a)?



Figur 4 (Aufgabe 3)



Figur 5 (Aufgabe 4)

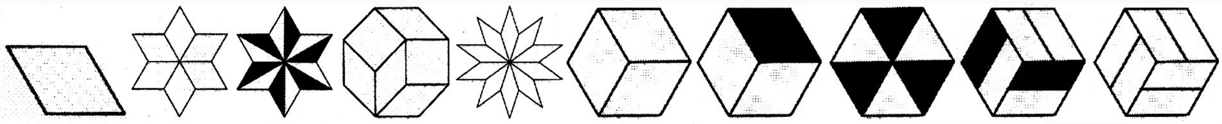
5. [12P.] Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S:\ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r}\,(\varphi, t) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 1-t \\ t\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le t \le 1)$$

   (a) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. die t-Linien?
   (b) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)
   (c) Leiten Sie die Koordinatengleichung (Gleichung in x, y und z) der Fläche S her.
   (d) Berechnen Sie den Normalenvektor im allgemeinen Flächenpunkt $\vec{r}_0 := \vec{r}\,(\varphi_0, t_0)$.
   Ist S abwickelbar? (Ohne Begründung)
   (e) Unter welchem Winkel trifft die t-Linie zu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ auf die (x, z)-Ebene?

1

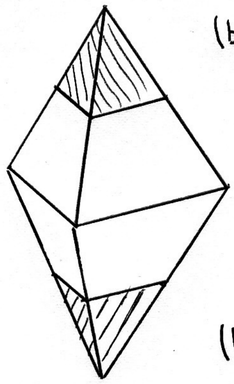
(a)



(1) Rhombus (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

$\mathbb{D}_2$ $\mathbb{D}_6$ $\mathbb{C}_6$ $\mathbb{D}_1$ $\mathbb{D}_{10}$ $\mathbb{D}_3$ $\mathbb{D}_1$ $\mathbb{D}_3$ $\mathbb{C}_1$ $\mathbb{C}_3$

(b)



(b1) Volumen ΔKörper: $V_{\Delta K} = 2V_{Tetra}$

Abgeschnittene Ecke ist massstäbliche Verkleinerung eines Tetraeders:

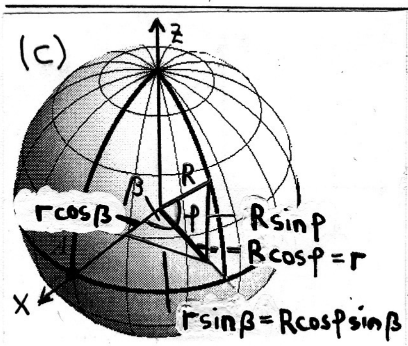
Längenfaktor: $\lambda = \frac{1}{2}$ Volumenfaktor: $\lambda^3 = \frac{1}{8}$ $V_{Ecke} = \frac{1}{8} V_{Tetra}$

$$\frac{V_{stumpf}}{V_{\Delta Körper}} = \frac{2V_{Tetra} - 2\cdot\frac{1}{8}V_{Tetra}}{2V_{Tetra}} = \frac{\left(2-\frac{1}{4}\right)}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}$$

(b2) Oberfläche ΔKörper: $F_{\Delta Körper} = 6F_\Delta$, $F_{Ecke} = 3\cdot\frac{1}{4}F_\Delta$ (Flächenfaktor: $\lambda^2 = \frac{1}{4}$)

$$\frac{F_{stumpf}}{F_{\Delta Körper}} = \frac{6F_\Delta - 2\cdot 3\cdot\frac{1}{4}F_\Delta + 2\frac{1}{4}F_\Delta}{6F_\Delta} = \frac{5}{6}$$

(c)



(c1) $\varphi = \frac{\pi/2}{24h}\cdot t$ $\quad \gamma: t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{\pi}{48h}t\right) \\ 0 \\ R\sin\left(\frac{\pi}{48h}t\right)\end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 24h)$

(c2) $\beta = \frac{2\pi}{24h}\cdot t$

$r\cos\varphi$ $\cdot\cos\beta \rightsquigarrow x$; $\cdot\sin\beta \rightsquigarrow y$

$\gamma: t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\left(\frac{2\pi}{24h}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{48h}t\right) \\ R\sin\left(\frac{2\pi}{24h}t\right)\cos\left(\frac{\pi}{48h}t\right) \\ R\sin\left(\frac{\pi}{48h}t\right)\end{pmatrix}$ $(0 \le t \le 24h)$

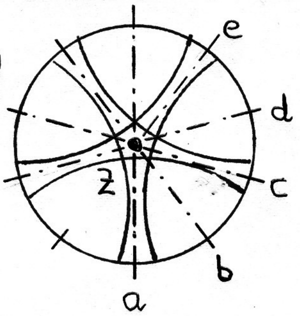
(d) $z^2 = (x+y)^2 - x^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 = 2xy + y^2$ (Pythagoras)

$x^2 - y^2 = |MB|^2 = z^2 - x^2$

$x^2 - y^2 = 2xy + y^2 - x^2 \iff 2x^2 - 2xy - 2y^2 = 0 \quad \| : 2y^2 \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$ Setze $\tau = \frac{x}{y}$ (oder $y = 1$)

$\tau^2 - \tau - 1 = 0$ QG $\rightsquigarrow \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

2



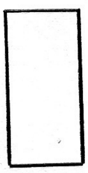
(a) $\operatorname{Symm}\Omega = \{\underbrace{I, R_{72°}, R_{144°}, R_{216°}, R_{288°}}_{\text{Rotationen um } Z}, \underbrace{S_a, S_b, S_c, S_d, S_e}_{\text{Geradenspiegelungen}}\}$

(b)

∘	I	R_{72}	R_{144}	R_{216}	R_{288}	S_a	S_b	S_c	S_d	S_e
I										
R_{72}	R_{72}	R_{144}	R_{216}	R_{288}	I	S_b	S_c	S_d	S_e	S_a
⋮										
S_e	S_e	S_d	S_c	S_b	S_a	R_{288}	R_{216}	R_{144}	R_{72}	I

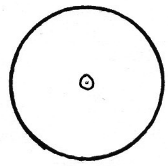
(c) $\mathbb{C}_{10}$

(d)



W

Symm W umfasst <u>weniger</u> Elemente als Symm Ω

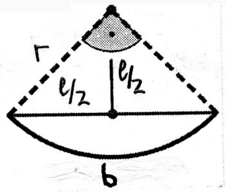


M

Symm M umfasst <u>mehr</u>

3

(a)



$$r = \sqrt{\left(\tfrac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\ell}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{\ell^2}{4} + \tfrac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\tfrac{\ell^2}{2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi}{2} r = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

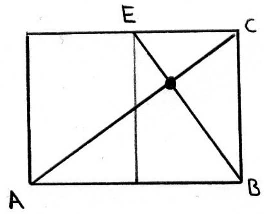
$\ell_1 = a$, $\quad \dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \ell_2 = \dfrac{\ell_1}{\sqrt{2}}$ d.h. Massstäbl. Verkleinerung mit Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$b_1 = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ $\qquad b_2 = \dfrac{b_1}{\sqrt{2}}$ da massstäbl. Verkleinerung

$$L = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots = \frac{\pi}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} b_3 + \ldots = \frac{\pi}{2}\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)}_{L} \quad | \cdot 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}L = \pi \cdot a + 2L \leftrightarrow 2\sqrt{2}L - 2L = \pi \cdot a \qquad \underline{\underline{L = \frac{\pi \cdot a}{2\sqrt{2} - 2}}}$$

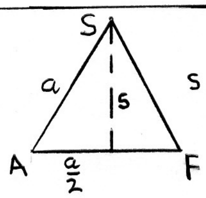
(b)



Das Zentrum der Spirale ist der Schnittpt. der Diagonalen AC und BE. Denn: Jedes horizontale Rechteck ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden horizontalen Rechtecks (mit Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$) und hat aufgrund seiner Ecklage seine Diagonale auf der Diagonalen des vorhergehenden. Somit haben alle horiz. Rechtecke ihre Diagonale auf AC ad infinitum bis zum Grenzpt. (Analog haben alle vertikalen Rechtecke ihre Diagonale auf BE)

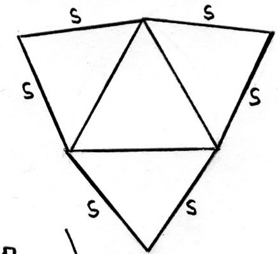
4

(a)

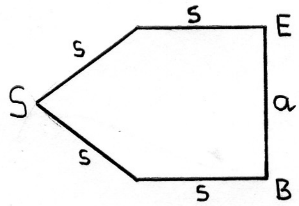


$$s = \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ansicht von oben:

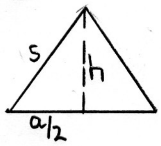


(b)



(c) $f = 14$, $e = 9$, $k = 21$ $\quad e - k + f = 2$ ✓

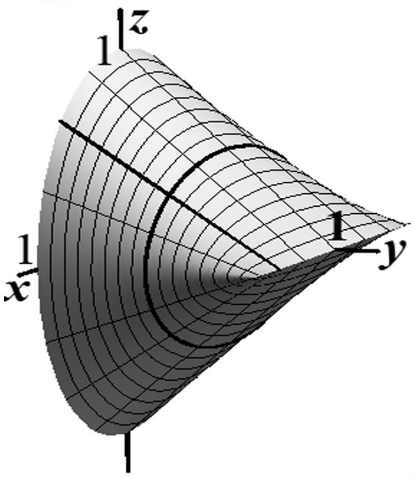
nicht regulär
nicht komb. regulär (da nicht in allen Ecken gleichviele Kanten zus'kommen)



(d) $V = V_{Prisma} + 3 \cdot V_{Pyram.}$ $\qquad V_{Prisma} = \text{"}G \cdot h\text{"} = F_\Delta \cdot a = \frac{1}{2} a \cdot s \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^3$, $\quad V_{Pyram} = \text{"}\frac{1}{3} G \cdot h\text{"} = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a$ $\leftarrow$ $h = \sqrt{s^2 - (a/2)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^3 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a^3 = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) a^3}}$$

5



(a) φ-Linien: Ellipsen parallel zur (x,z)-Ebene mit Mittelpt auf y-Achse
t-Linien: Geradenstücke parallel zur (y,z)-Ebene

(b) Ja, S entsteht durch Bewegung eines Geradenstücks (der eine Endpt auf einem Kreis in der (x,z)-Ebene, der andere auf einer Strecke $\parallel$ x-Achse bei $y=1$)
$\longrightarrow$ Schar gerader Linien, S ist Regelfläche

(c) $x = \cos\varphi$, $y = 1 - t \rightarrow t = 1 - y$, $z = t \sin\varphi \longrightarrow \sin\varphi = \dfrac{z}{t} = \dfrac{z}{1-y}$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \leftrightarrow x^2 + \frac{z^2}{(1-y)^2} = 1, \quad x^2(1-y)^2 + z^2 = (1-y)^2$$

(d) Richtung der φ-Linie in $\vec{r}_0$: $\vec{s} = \vec{r}\,'_{t_0}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ 0 \\ t_0 \cos\varphi_0 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{t} = \vec{r}\,'_{\varphi_0}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}$
bzw. der t-Linie

$$\vec{n} = \vec{s} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_0 \\ 0 \\ t_0\cos\varphi_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t_0\cos\varphi_0 \\ \sin^2\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix}}}$$

$\qquad - \sin\varphi_0 \qquad 0$
$\qquad 0 \qquad -1$

Nicht abwickelbar!

(e) Richtung der t-Linie zu $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$