Serie 1: Funktionen von mehreren Variablen

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 2** Kapitel III (S. 332-333)

- zu Abschnitt 1 die Übungsaufgaben 1 und 3,
- zu Abschnitt 2 die Übungsaufgaben 1-8, 10.

1. Skizzieren Sie den Graphen sowie einige charakteristische Niveaulinien der Funktion

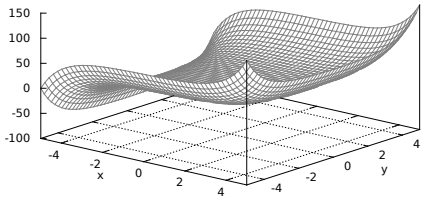
a) $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $g(x,y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

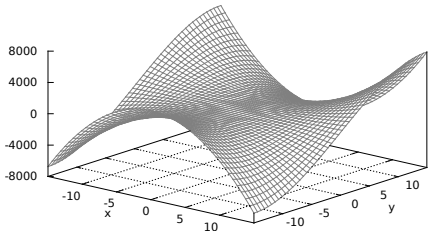
c) $\varphi(x,y) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + 1$

d) $\psi(x,y) = (x-2)^2 - 3$

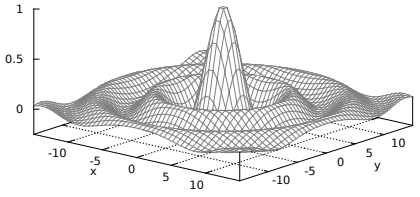
2. Wir betrachten die folgenden Funktionsgraphen



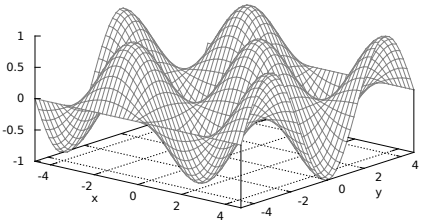
(i)



(ii)



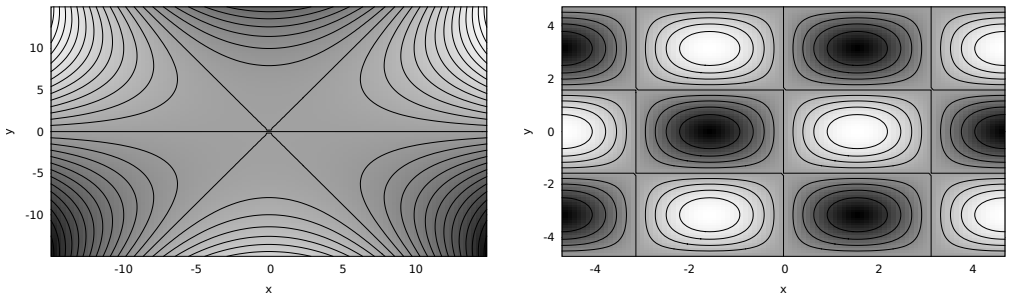
(iii)



(iv)

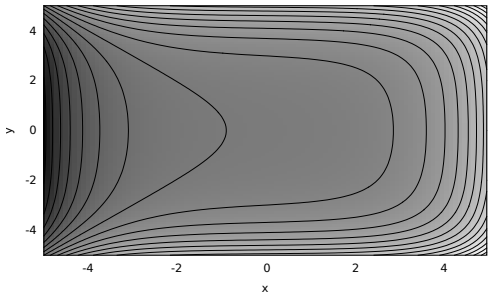
Bitte wenden!

sowie die folgenden Niveaulinienportraits

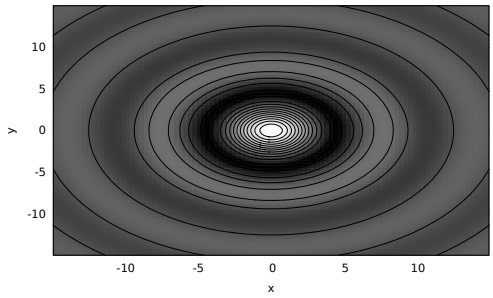


(α)

(β)



(γ)



(δ)

Ordnen Sie den folgenden Funktionen jeweils einen der Funktionsgraphen (i) - (iv) sowie eines der Niveaulinienportraits (α) - (δ) zu:

a) $(x, y) \mapsto 3x^2y - y^3$

b) $(x, y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$

c) $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $(x, y) \mapsto \sinh x + \cosh y$

3. Nach dem *Satz von Schwarz* (cf. Papula Bd 2 III 2.2) darf die Reihenfolge der Differentiationsschritte in einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung vertauscht werden, sofern alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetig sind.

Verifizieren Sie dies, indem sie

a) die gemischten zweiten Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^y$

b) alle gemischten dritten Ableitungen der Funktion $g(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$

berechnen, wo diese definiert sind.

Siehe nächstes Blatt!

4. Wir betrachten die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{4} + \frac{xy}{2}$$

Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto h(t) = f\left(\gamma(t)\right),$$

a) direkt, d.h. indem Sie h explizit angeben und ableiten,

b) mit Hilfe der Kettenregel (cf. Papula Bd 2 III 2.3).

5. Wir betrachten die Kurve $x^3 + 2y^3 + xy = 4$ um den Punkt $(2, -1)$.

a) Gibt es eine Funktion $y = y(x)$ von x, so dass sich die Kurve in der Nähe dieses Punktes als Graph von y darstellen lässt? Wenn ja, welchen Wert hat $y'(2)$?

b) Gibt es eine Funktion $x = x(y)$ von y, so dass sich die Kurve in der Nähe dieses Punktes als Graph von x darstellen lässt? Wenn ja, welchen Wert hat $x'(-1)$?

Mehr **Informationen** zur Vorlesung und den Übungen finden Sie unter

https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2014/other/mathematik2_umnw

Die **Übungsgruppen** finden jeweils statt am

- Dienstag von 8-10 Uhr
- Donnerstag von 9-11 Uhr
- Donnerstag von 13-15 Uhr
- Donnerstag von 15-17 Uhr

Bitte tragen Sie sich so bald wie möglich in eine der Übungsgruppen ein.

Die **Präsenz** findet ab der zweiten Semesterwoche (d.h. ab Montag 24.2.2014) jeweils am Montag, Mittwoch und Donnerstag im Raum HG G 19.2 von 12 bis 13 Uhr statt.
Am 27. Februar 2014 findet die Präsenz ausnahmsweise im HG 19.1 statt.