Serie 4: Doppelintegrale

Neben den Aufgaben dieser Serie empfehlen wir Ihnen aus Papula **Bd. 2** Kapitel III (S. 338-339)

- zu Abschnitt 3 die Übungsaufgaben 1, 3, 5, 7, 8, 12, 13 und 14.

1. Es bezeichne Q das Quadrat

$$Q = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x, y \leq 1 \,\}$$

Berechnen Sie den Wert der folgenden Doppelintegrale:

a) $\displaystyle\iint_Q e^{x+y}\, dx\, dy$ **b)** $\displaystyle\iint_Q \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy$

c) $\displaystyle\iint_Q \frac{1}{(x+y+1)^2}\, dx\, dy$ **d)** $\displaystyle\iint_Q \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy$

2. Wir betrachten die folgenden Integrale

i) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y)\, dx\, dy$ **ii)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} g(x, y)\, dy\, dx$

iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ **iv)** $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3\, dy\, dx$

wobei f und g beliebige (integrierbare) Funktionen bezeichnen.

a) Skizzieren Sie für die Integralen **i)-iv)** jeweils das Integrationsgebiet.

b) Vertauschen Sie in den Integralen **i)-iv)** die Reihenfolge der Integrationen, so dass die innere Variable jeweils zur äusseren wird und umgekehrt.

c) Berechnen Sie die Integrale **iii)** und **iv)**.

Bitte wenden!

3. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale:

a) $\displaystyle\iint_A x^3 y^2 \, dx \, dy, \quad A:$ die Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq R^2$ für $R > 0$.

b) $\displaystyle\iint_B (x^2 + y) \, dx \, dy, \quad B:$ der von $x = y^2$ und $x^2 = y$ begrenzte Bereich.

c) $\displaystyle\iint_C \frac{x^2}{y^2} \, dx \, dy, \quad C:$ der von $x = 2$, $y = x$ und $xy = 1$ begrenzte Bereich.

d) $\displaystyle\iint_D \cos(x + y) \, dx \, dy, \quad D:$ der von $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$ begrenzte Bereich.

4. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale mittels Polarkoordinaten:

a) $\displaystyle\iint_A (1 - 2\,x - 3\,y) \, dx \, dy, \; A:$ die Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$.

b) $\displaystyle\iint_B e^{x^2+y^2-1} \, dx \, dy, \; B:$ der Kreissektor $x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$.

c) $\displaystyle\iint_C \frac{x\,y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx \, dy, \; C:$ der Ringteil $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x, y \geq 0$.

d) $\displaystyle\iint_D \arctan \frac{y}{x} \, dx \, dy, \; D:$ der Ringteil $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $x/\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\,x$.