Lösungen 11

1. Dies folgt unmittelbar aus dem Fakt, dass $e_i \otimes e_j$ eine Basis von $V \otimes V$ bilden. Dann ist nämlich die Linearkombination

$$\alpha = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2$$

eindeutig gegeben und lässt insbesondere keine Darstellung der form

$$v \otimes w$$

zu: Schreibe $v = v^k e_k$, $w = w^l e_l$ dann $v \otimes w = v^1 w^1 e_1 \otimes e_1 + v^1 w^2 e_1 \otimes e_2 + v^2 w^1 e_2 \otimes e_1 + v^2 w^2 e_2 \otimes e_2$. Aus Eindeutigkeit folgt dann $v^1 w^2 = 0$ und $v^2 w^1 = 0$ was aber $v^1 w^1 = 0$ oder $v^2 w^2 = 0$ impliziert. Widerspruch.

2. Der Trägheitstensor I_{ij} ist gegeben durch das Integral $\int_M J_{ij}(x,y,z)dm$ mit

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Da die Platte in der $z = 0$ Ebene liegt, und $\int_M dm = \frac{M}{ab}\int_0^a d \int_0^b dy$ bekommen wir, dass

$$(I_{ij}) = \frac{M}{ab}\begin{pmatrix} \frac{y^3}{3}\Big|_0^b & -\frac{x^2}{2}\Big|_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_0^b & 0 \\ -\frac{x^2}{2}\Big|_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_0^b & \frac{x^3}{3}\Big|_0^a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x^3}{3}\Big|_0^a + \frac{y^3}{3}\Big|_0^b \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & \\ & & \frac{a^2+b^2}{3} \end{pmatrix}.$$

Da $\omega = e_3$ berechnen wir, dass

$$E = \frac{1}{2} w I w = \frac{1}{2} M \frac{a^2+b^2}{3}.$$

Im Beispiel 6.2 im Skript rotiert die Platte durch ihren Schwerpunkt, was im obigen Koordinatensystem dem Punkt $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)$ entspricht, und die Rotationsenergie wurde berechnen zu $\frac{1}{2} M \frac{a^2+b^2}{12} < E$. Wir wollen darauf hinweisen, wie wir vom einem Resultat zum anderen kommen können: Das Gesamterägheitsmoment der Platte bei Rotation entlang der z-Achse durch den Massenschwerpunkt sei $I_s = M\frac{a^2+b^2}{12}$. Die allgemeine Formel für das Gesamtträgheitsmoment entlang einer Achse gespannt durch einen Einheitsvektor ω ist

$$I_\omega = \omega^i I_{ij} \omega^j = \int_M |\omega \times x|^2 dm = \int_M |x_\perp|^2 dm$$

wobei $|x_\perp|$ den Abstand von x zur Rotationsachse $\mathbb{R}\omega$ angibt. Betrachte also erneut die Rotation entlang ω um eine Ecke (sagen wir $(0,0,0)$ wie oben), dann kann der Vektor x zerlegt werden in $x = s + \tilde{x}$ wobei $s = (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)$ der Massenschwerpunkt ist und $\tilde{x} = x - s$. Dann

$$I_\omega = \int_M |s+\tilde{x}|^2 dm = M|s|^2 + 2\int_M s \bullet \tilde{x} dm + \int_M |\tilde{x}|^2 dm.$$

Wir machen nun zwei Feststellungen:

- $I_s = \int_M |\tilde{x}|^2 dm$ denn $\tilde{x}$ gibt gerade den Abstand vom Massenschwerpunkt.
- $\int_M s \bullet \tilde{x} dm = \int_M s \bullet (x-s) dm = -M|s|^2 + s \bullet \int_M x dm = 0$ da $s = \int_M x dm$ gerade die Berechnungsformel für den Schwerpunkt ist.

Also $I_\omega = M|s|^2 + I_s = M(a^2+b^2)(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}) = M(a^2+b^2)(\frac{1}{3})$ (und glücklicherweise mit obigem Ergebnis übereinstimmt).

3. Wir legen die Scheibe entlang der $x-y$ Ebene, so dass die Rotationsachse entlang e_3 läuft. Aus Symmetriegründen sind alle Geraden auf der $x-y$ Hauptträgheitsachsen. Insbesondere ist zu e_1 und e_2 ein gleiches Hauptträgheitsmoment zugeordnet ($I_{11} = I_{22}$). Da wir die Höhe vernachlässigen ($z = 0$), die e_3 Richtung aber definitiv eine Symmetrie bzgl der Scheibe definiert, ist die z-Achse die dritte Hauptträgheitsachse und es folgt $I_{33} = I_{11} + I_{22}$ aus der allgemeinen Formel für den Trägheitstensors, und die Rotationsachse mit der letzten Hauptträugtheitsachse zusammen fällt, $I_\omega = I_{33}$. Es bleibt also I_{11} zu berechnen.

Zunächst prüfen wir unsere Behauptung: Bezüglich der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$, so dass die Scheibe definiert ist als $\{(x,y,0) : x^2+y^2 = R\}$ hat der zugehörige Trägheitstensor die Form $\operatorname{diag}(I_{11}, I_{11}, 2I_{11})$. Um Diagonalform zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass $I_{12} = 0$ da $z = 0$ und somit $I_{13} = I_{23} = 0$.

Die Fläche der Scheibe lässt beschreiben durch $\int_A da = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr$, wobei wir Radialkoordinaten nutzen: $(x,y,0) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)$ mit $r^2 = x^2+y^2$ und φ der Winkel von $(x,y,0)$ zur e_1-Achse. Dann ist

$$I_{12} = -\int xydm = \frac{M}{\pi R^2}\int_A xyda = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin\varphi\cos\varphi dr d\varphi.$$

Nun ist $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = 0$ da die Stammfunktion Vielfaches einer 2π-periodischen Funktion ist (nämlich $(\sin\varphi)^2$) und damit

$$I_{12} = 0.$$

Für die Diagonalelemente berechnen wir

$$I_{11} = \int (y^2+z^2)dm = \int y^2 dm = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3(\sin\varphi)^2 dr d\varphi = \frac{M}{\pi R^2}\pi\frac{R^4}{4} = \frac{M}{4}R^2$$

und

$$I_{22} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3(\cos\varphi)^2 dr d\varphi = \frac{M}{4}R^2$$

da $\int_0^{2\pi}(\sin\varphi)^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^2 d\varphi = \pi$.

Weiter ist $I_{33} = \int (x^2+y^2)dm = I_{11} + I_{22} = 2I_{11} = \frac{M}{2}R^2$ wie behauptet, oder alternativ

$$I_{33} = \int (x^2+y^2)dm = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi R^4/4 = \frac{M}{2}R^2.$$

Das Gesamterägheitsmoment I_{e_3} bzgl. Rotation um e_3 stimmt dann mit I_{33} ein, da

$$I_{e_3} = e_3 I e_3 = I_{33}.$$