Lösungen 3

1. Wir rechnen wie im Beispiel 2.21 im Skript: Für die Ebene E_1 bestimmen wir erst eine natürliche Basis

$$\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

im Sinne, dass $\mathcal{P}_1 v_i = v_i$ für $i = 1, 2$ und $\mathcal{P}_1 v_3$, d.h. v_1 und v_2 sind so gewählt, dass sie in E_1 liegen (und $\mathcal{P}_1|_{E_1} = \mathrm{Id}$) und $v_3 = v_1 \times v_2$ liegt orthogonal zur Ebene (wo gilt $\mathcal{P}_1|_{E_1^\perp} = 0$). In dieser Basis also

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Wechsel von Standardbasis $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}_1$ ist gegeben durch

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

damit

$$L^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -5 & -6 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

also

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{E}} = L[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1} L^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 13 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Analog gehen wir für $[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{E}}$ vor in dem wir

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

setzen, damit ist der Basiswechsel

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

also

$$[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{E}} = K[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{B}_2} K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Please turn over!

2. Zunächst sei $v = a + bi \in \mathbb{C}$ mit Koordinatenvektor $[v]_{\{1,i\}} = (a,b)^T$ bezüglich $\{1,i\}$. Dann hat $\psi_z v = zv = (as - bt) + i(at + sb)$ Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} as - bt \\ at + sb \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

also ist

$$[\psi_z]_{\{1,i\}} = \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix}.$$

Weiter bemerken wir, dass die Basis $\mathcal{B} = \{e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}\}$ durch die Rotation um 90 Grad aus $\{1,i\}$ in der $\mathbb{C}$-Ebene entsteht, sprich durch $\psi_{e^{i\frac{\pi}{4}}}$. Wir können also formal

$$\mathcal{B} = \{1,i\}L$$

schreiben, wobei der Basiswechsel $L = [\psi_{e^{i\frac{\pi}{4}}}]_{\{1,i\}}$ bezeichne. Damit

$$[\psi_z]_{\mathcal{B}} = L^{-1}[\psi_z]_{\{1,i\}}L.$$

Allerdings korrespondieren alle Matrizen auf der rechten Seite zu Multiplikation mit einem Element in $\mathbb{C}$. Diese Operation ist kommutativ ($\mathbb{C}$ ist ein Körper!), also müssen auch die Matrizen kommutieren. Wir folgern, dass $[\psi_z]_{\mathcal{B}} = [\psi_z]_{\{1,i\}}$.

3. **a)** Der Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bezüglich $\mathcal{E}$ ist (a,b,c,d). Nach Anwendung von $\mathcal{T}$ haben wir also den Koordinatenvektor (a,c,b,d) womit $\mathcal{T}$ der Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in der Standardbasis entspricht. Der Basiswechsel von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist gegeben durch die Matrix

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}} = L^{-1}[\mathcal{T}]_{\mathcal{E}}L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) $[\mathcal{T}v]_{\mathcal{E}} = (1,3,2,4)^T$ und $[\mathcal{T}w]_{\mathcal{B}} = (1,-1,1,1)^T$