Lösungen 4

1. Wir gehen im Prinzip nach dem Beispiel 3.8 im Skript. Per definition

$$\beta^i(v_j) = \delta^i_j.$$

Die Schlüsselbemerkung ist jetzt, diese Gleichung in Koordinaten (bezüglich der Standardbasis e_k) aufzuschreiben! Also falls $\beta^i = a^i_k \varepsilon^k$ und $v_j = L^m_j e_m$ bekommen wir mit einsetzen, dass

$$\delta^i_j = \beta^i(v_j) = a^i_k \varepsilon^k(L^m_j e_m) = a^i_k L^m_j \delta^k_m = a^i_k L^k_j$$

via Verwendung von $\varepsilon^k(e_m) = \delta^k_m$. Bisher nutzen wir L für die Matrix die den Basiswechseln angibt, in der Notation

$$(v_1 \dots v_3) = (e_1 \dots e_3)L,$$

und damit die Notation $v_j = L^m_j e_m$ berechtigt. Die Matrix definiert durch die Koordinaten (a^i_k) ist nach obiger Rechnung die Inverse von L, also $a^i_k = (L^{-1})^i_k$. Wegen $\beta^i = a^i_k \varepsilon^k$ ist der Koordinatenvektor $[\beta^i]$ also gegeben durch die $i$te Zeile von L^{-1}. Diese können direkt abgelesen werden,

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. **a)** Wir wollen die Koeffizienten b^j_i der Basisvektoren $b_i = \sum_j b^j_i x^j$ bestimmen zu der $\mathcal{B}^*$ dual ist. Per definition muss gelten $\beta^k(b_i) = \delta^k_i$, und durch konkretes einsetzen,

$$\beta^1(\sum_j b^j_i x^j) = b^0_i \quad \beta^1(\sum_j b^j_i x^j) = b^1_i \quad \beta^1(\sum_j b^j_i x^j) = b^3_i$$

bekommen wir, dass $b_1 = 1$, $b_2 = x$, $b_3 = x^2$, die Standardbasis von V.

b) Für ein generisches Polynom $p = \sum_{i \leq 0} a_i x^i$ ist

$$\omega(p) = \sum_{i \leq 0} a_i/(i+1) = a_0 + a_1/2 + a_2/3 = \beta^1(p) + \beta^2(p)/2 + 2\beta^3(p)/3.$$

Der Koordinatenvektor ist also $(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.

c) Wir gehen analog wie in Aufgabe 1 vor. Die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Inverse

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Koordinatenvektoren von $\mathcal{A}^*$ bezüglich $\mathcal{B}^*$ hatten wir als Zeilenvektor dieser Matrix bestimmt. Also für den ersten Dualvektor α^1 haben wir $\alpha^1 = \frac{1}{2}(\beta^1 + \beta^2 - \beta^3)$ und damit $\alpha^1(p = \sum a_i x^i) = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - a_2)$. Analog, $\alpha^2(\sum a_i x^i) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_0)$ und $\alpha^3(\sum a_i x^i) = a_3$.

Please turn over!

d) Gefragt ist nach der Matrix M bezüglich der $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)M$ gilt. Wir haben die Indizes unten geschrieben, um zu unterstreichen wir jetzt im Vektorraum V^* arbeiten. Die Matrix M hatten wir schon für letzte Teilaufgabe genutzt. Um die Zeilenvektoren in Spaltenvektoren zu verwandeln, transponieren wir, also

$$M = L^{-T}.$$

Wir bemerken noch, dass keine Transposition nötig ist, wenn wir die Indizes oben behalten (siehe Skript Claim 3.11) und als Definition von M die Gleichung

$$(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)^T = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)^T M$$

verwenden (siehe Tabelle 1 Summary nach Claim 3.11).

e) Das Transformationverhalten von Linearformen ist Kovariant, also $[\omega]_{\mathcal{A}^*} = L(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}) = (\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3})$.

3. Seien $v, w \in R^2$. Wir beweisen die Formel zunächst für $\vartheta = \pi/2$, also wenn zwei Vektoren orthogonal aufeinander stehen. Dieses Zwischenresultat wollen wir für eine Basis $\{b_1, b_2\}$ die wir wir folgt einführen, nutzen. Wähle $\{b_1, b_2\}$ so, dass $b_1 = v/\|v\|$ und b_2 orthonormal bezüglich dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2x_2$ ist, zum Beispiel $b_2 = (-b_2, b_1)$. Es gilt jetzt also $\|b_1\| = \|b_2\| = 1$ und $\langle b_1, b_2\rangle = 0$. Nach der (Umkehrung) des Satz des Pythagoras stehen b_1 und b_2 jetzt orthogonal aufeinander, denn es gilt $\|b_1\|^2+\|b_2\|^2 = \|b_1\|^2+\|b_2\|^2+2\langle b_1, b_2\rangle = \|b_1+b_2\|^2$ durch aus multiplizieren der rechten Seite (man versichere sich, dass der Vektor b_1+b_2 die gleiche Länge hat wie die Hypothenuse des Dreiecks $(0, 0), b_1, b_2$.

Wir nutzen jetzt b_1,b_2 als Koordinatensystem wie folgt: Sei $w' = w/\|w\|$, dann liegt $w' = w'^j b_j$ auf dem Einheitskreis, insbesondere erfüllt der eingeschlossene Winkel zwischen w' und b_1 die Gleichung für den Kosinus, $\cos\vartheta = \frac{\|P_{b_1}(w')\|}{1}$ wobei $\|P_{b_1}(w')\|$ die Länge der Ankathete, und damit die Länge von w' auf b_1 projiziert bezeichnet, und 1 die Länge der Hypotenuse ist. Da $P_{b_1}(w') = w'^1 = \langle w', b_1\rangle$ also $\langle w', b_1\rangle = \cos\vartheta$, multipliziere beide Seiten mit $\|w\|$ und $\|v\|$ und wegen der Bilinearität von des Skalarprodukts schliessen wir

$$\langle w, v\rangle = \|v\|\|w\|\cos\vartheta.$$