Lösungen 7

1. **a)** Wir haben

$$\det(G - \lambda \mathbb{1}) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1.$$

Durch Anwendung der Binomischen Formel finden wir $\lambda_\pm = 2 \pm \sqrt{5}$.

b) Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^1_\pm + 2a^2_\pm &= \lambda_\pm a^1_\pm \\ 2a^1_\pm + 3a^2_\pm &= \lambda_\pm a^2_\pm. \end{aligned}$$

von Hand: Wir lösen die erste Zeile nach $a^2_\pm = \frac{1}{2}a^1_\pm(\lambda_\pm - 1)$ auf und sehen, dass mit der Wahl die zweite Zeile automatisch erfüllt ist. Damit ist ist für alle $a \neq 0$

$$v_\pm = \begin{pmatrix} 2a \\ a(1 \pm \sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von $\lambda_\pm$.

c) Da

$$g(v_+, v_-) = v_+^T G v_- = \lambda_- v_+^T v_- = \lambda_- a^2(4 + (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = \lambda_- a^2(4+1-5) = 0$$

stehen die Vektoren v_+ und v_- orthogonal aufeinander. Wir wählen nun a, so dass

$$g(v_\pm, v_\pm) = v_\pm^T G v_\pm = v_\pm^T \lambda_\pm v_\pm = (2 \pm \sqrt{5})(4a^2 + a^2(1 \pm 2\sqrt{5} + 5))$$

gleich 1 ist (und damit $\{v_+, v_-\}$ eine orthonormale Basis bezüglich g bilden), also

$$a^2 = \left(5(2 \pm \sqrt{5})^2\right)^{-1}$$

und damit wählen wir $\mathcal{A}$ bestehend aus den Vektoren

$$v_\pm = \frac{1}{\sqrt{5}(2 \pm \sqrt{5})} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

2. Wir haben bereits in der letzten Serie gesehen, dass

$$\mathrm{Spur}(A^T B) = A_{ij} B_{ij}$$

bezüglich der Standardbasis von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Damit ist klar, dass Spur symmetrisch ist. Andererseits, ist dann auch $\mathrm{Spur}(A^T A) = A_{ij} A_{ij} > 0$ ausser wenn $A_{ij} = 0$ für alle i, j und damit positiv.

Please turn over!

3. **a)** Zunächst beschreiben wir die Transformationsmatrix $L = L_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$. Diese ist gegeben durch

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Damit ist der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ durch die Matrix

$$\Lambda = L^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Sei G die Matrix von g bezüglich $\mathcal{E}$. Dann gilt

$$\delta_{ij} = g(b_i, b_j) = g(Le_i, Le_j) = (Le_i)^T G L e_j = e_i^T L^T G L e_j = (L^T G L)_{ij}$$

oder kompakter, $\mathbb{1} = L^T G L$. Damit bekommen wir (indem wir von beiden Seiten mit L^{-T} respektive L^{-1} multiplizieren, dass

$$G = L^{-T} L^{-1} = \Lambda^T \Lambda = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 38 & 10 & -26 \\ 10 & 3 & -7 \\ -26 & -7 & 18 \end{bmatrix}$$

b) Zunächst berechnen wir $g(v, v)$ bezüglich $\mathcal{E}$, also

$$g(v, v) = (3, 5, 7) G (3, 5, 7)^T = (-18, -4, 13)(3, 5, 7)^T = 17.$$

Andererseits ist $[v]_{\mathcal{B}} = \Lambda [v]_{\mathcal{E}} = (-1, 0, 4)^T$ und damit $g(v, v) = (-1, 0, 4) \mathbb{1} (-1, 0, 4)^T = 1 + 16 = 17$.