D-MAVT FS 2014
K. Nipp
A. Hiltebrand

NUMERISCHE MATHEMATIK

Serie 2

1. **a)** Berechnen Sie eine Approximation des Integrals

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 0.746824132812427\ldots,$$

indem Sie drei Schritte der Trapezmethode durchführen.

b) Verbessern Sie die Werte aus **a)** mit Hilfe des Rombergschemas.

2. (**PA**) Implementieren Sie das Romberg-Verfahren wie im Skript, Seite 98.

Benützen Sie als Toleranz `TOL=1e-8` und als maximale Iterationszahl `MaxIter=10`.

- Testen Sie die Implementierung anhand des Integrals von Aufgabe 1.
- Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus

$$\int_0^3 \sin(x)\, e^x\, dx.$$

3. (**PA**) *Gauss-Quadratur.*

a) Für die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$$

gilt $I = \int_0^\pi f(x)\, dx = \pi/\sqrt{2}$. Bestimmen Sie eine Approximation von I mit der 5-Punkt-Gaussformel. Diese Formel besitzt die folgenden Knoten und Gewichte (auf 8 Stellen gerundet):

$\pm x_i$:	0	0.53846931	0.90617985
w_i :	0.56888889	0.47862867	0.23692689

b) Unterteilen Sie das Intervall $[0, \pi]$ in drei gleich grosse Teilintervalle und wenden Sie die 5-Punkt-Gaussformel auf jedes Teilintervall an.

c) Bestimmen Sie eine Approximation von I mit der 15-Punkt-Gaussformel. Berechnen Sie die Knoten und die Gewichte mit der Funktion `lgwt` aus
`http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/4540`

Bitte wenden!

d) Vergleichen Sie Ihre Resultate in **a)**, **b)** und **c)** mit der exakten Lösung.

e) Berechnen Sie das 2-dimensionale Integral

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\pi} y \, \cos \frac{x\, y}{2} \, dy \, dx$$

mit der Funktion `lgwt` und k Gauss-Knoten, $k = 1, \ldots, 10$.

Die 2-dimensionalen Gauss-Knoten und Gewichte in dem Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ sind

$$\mathbf{x}_{i,j} = (x_i, y_j) \quad \text{und} \quad w_{i,j} = w_i^x \cdot w_j^y,$$

wobei x_i (bzw. y_i) die Gauss-Knoten sind im Interval $[a, b]$ (bzw. in $[c, d]$) und w_i^x (bzw. w_i^y) die dazugehörigen Gewichte.

Hinweis 1: Verwenden Sie die Funktion `meshgrid`.

Hinweis 2: Die exakte Lösung ist $I_2 = 8$.

f) *Fakultativ*: Plotten Sie den Fehler aus **e)** gegen die Anzahl Gauss-Knoten.
Was passiert, wenn der Integrand nicht differenzierbar ist:
z.B. $f(x, y) = \min\{1 - |x|, 1 - |\frac{y}{\pi}|\}$, $\int_{-1}^{1} \int_{-\pi}^{\pi} f = 4\pi/3$?

4. *Multiple Choice. Online abzugeben.*

a) Die Trapezmethode ist ein Verfahren der Ordnung

(i) 1 (iii) 3 (v) 5

(ii) 2 (iv) 4 (vi) 6

b) Bei jedem Schritt der Trapezmethode, d. h. bei einer Verdoppelung der Anzahl Teilintervalle, wird der Fehler (ungefähr) mit dem folgenden Faktor multipliziert (sofern der Integrand genügend glatt ist und die Teilintervalle genügend klein sind):

(i) $1/2$ (iii) $1/4$ (v) $1/8$

(ii) $1/3$ (iv) $1/6$ (vi) $1/16$

c) Die Simpson-Methode ist ein Verfahren der Ordnung

(i) 1 (iii) 3 (v) 5

(ii) 2 (iv) 4 (vi) 6

Siehe nächstes Blatt!

d) Bei jedem Schritt der Simpsonmethode, d. h. bei einer Verdoppelung der Anzahl Teilintervalle, wird der Fehler (ungefähr) mit dem folgenden Faktor multipliziert (sofern der Integrand genügend glatt ist und die Teilintervalle genügend klein sind):

(i) $1/2$ (iii) $1/4$ (v) $1/8$

(ii) $1/3$ (iv) $1/6$ (vi) $1/16$

e) Wir betrachten das folgende Rombergschema:

-0.500000000000000
-0.550000000000000 -0.566666666666667
-0.565588235294118 -0.570784313725490 -0.571058823529412
-0.569494247245545 -0.570796251229354 -0.570797047062944 a

Was muss anstelle von a stehen?

(i) -0.570792891880937 (ii) -0.570779595298513 (iii) -0.570709788240789

f) Wie viele Funktionsauswertungen wurden für das Schema aus **e)** benötigt?

(i) 8 (iii) 12 (v) 16

(ii) 9 (iv) 13 (vi) 17

g) Das Integral $\int_{\pi}^{2\pi} \cos(x^2)dx$ geht durch Substitution in das Integral $\int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2} \cos((\frac{\pi}{2}x + \frac{3\pi}{2})^2)dx$ über.

(i) Richtig. (ii) Falsch.

h) Wir möchten das Integral $\int_0^{\pi/2} |x - a| e^{x^2} dx$ berechnen, wobei $a \in (0, \pi/2)$ liegt. Was ist zu bevorzugen?

(i) eine Gauss-Quadraturformel auf dem Intervall $[0, \pi/2]$

(ii) je eine Gauss-Quadraturformel auf dem Intervall $[0, a]$ und $[a, \pi/2]$

Abgabe: Am Mittwoch 12.03.

- Multiple Choice: Online über zugeschicktem Link.
- Theorieaufgaben: Auf Papier in den Übungsstunden.
- Matlabaufgaben: Online als zip-Datei unter
  `http://www.math.ethz.ch/~grsam/submit/?VL=06`
  und zusätzlich auf Papier (Code inkl. Ergebnisse und Interpretation).