Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Beispielprüfung

Hinweise für die Prüfung

- Zeit: 90 Minuten
- Alle Resultate müssen begründet werden
- Zugelassene Hilfsmittel: 5 A4-Blätter doppelseitig (=10 Seiten) hand- oder computergeschriebene (Font-Size: 14pt, Font-Family: Sans-serif, Zeilenabstand: 1.0) Notizen Sonst keine Hilfsmittel zugelassen.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $x^* \in (0, \infty)$ so, dass

$$f(x^*) = 0 \tag{1}$$

und $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der Iterationen des Newton-Verfahrens für die Gleichung (1) und $x^{(0)} \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie $x^{(1)} \in \mathbb{R}$ und $x^{(2)} \in \mathbb{R}$ falls $x^{(0)} = 1$ ist.

b) Gibt es eine Umgebung U von x^*, sodass für alle $x^{(0)} \in U$ gilt, dass die Folge $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$

   i) linear

   ii) quadratisch

   gegen x^* konvergiert?

c) Starten Sie mit dem Interval $[1, 2]$ und führen Sie zwei Schritte des Bisektionsverfahrens für die Gleichung (1) durch.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

a) Ist A positiv definit?

Bitte wenden!

b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Cholesky-Zerlegung von A.

c) Sei $b = (1,\ -7)^T \in \mathbb{R}^{2,1}$. Bestimmen Sie mithilfe der Cholesky-Zerlegung sowie Vorwärts- und Rückwärtssubstion die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}.$$

a) Besitzt das lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$ eine eindeutige Lösung x^*?

b) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A.

c) Lösen Sie obiges Ausgleichsproblem mithilfe der QR-Zerlegung aus b).

4. a) Sei $a = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ und $c = (6, 7, 8, 9) \in \mathbb{R}^4$ berechnen Sie $b \in \mathbb{R}^4$ sodass $a * b = c$, wobei hier $*$ die periodische Konvolution bezeichnet.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion, welche (falls möglich) unter Benützung der diskreten Fouriertransformation zu Eingabevektoren $a \in \mathbb{C}^n$ und $c \in \mathbb{C}^n$ einen Vektor $b \in \mathbb{C}^n$ zurückgibt mit $a * b = c$.

5. Wir betrachten das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\pi f(x)g(x)dx \tag{2}$$

auf $L^2([0, \pi])$.

a) Zeigen Sie, dass $\sin$ und $\cos$ orthogonal bezüglich dem Skalarprodukt (2) sind.

b) Sei $V = \operatorname{span}\{\sin, \cos\}$ und $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$ für alle $x \in [0, \pi]$. Bestimmen Sie die Bestapproximation $\tilde{f} \in V$ von f, dass heisst berechnen Sie

$$\tilde{f} = \operatorname*{argmin}_{\tilde{f} \in V} \|f - \tilde{f}\|_{L^2(0,\pi)}$$

wobei $\|f\|_{L^2(0,\pi)} := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ für alle $f \in L^2([0, \pi])$.

6. Sei $x = (x_0, x_1) = (0, 2/3)$. Geben Sie, falls möglich, Gewichte $w = (w_0, w_1)$ an, so dass die Quadraturformel zu den Stützpunkten x und Gewichten w für das Interval $[0, 1]$ Exaktheitsgrad 2 besitzt.

Siehe nächstes Blatt!

7. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'' = x' + x + 1, \quad x(0) = 1 \quad \text{and} \quad x'(0) = 0 \tag{3}$$

a) Welche Ordnung besitzt die Differentialgleichung des Anfangswertproblems (3)?

b) Überführen Sie das Anfangswertproblem (3) in ein Anfangswertproblem erster Ordnung.

c) Die implizite Mittelpunktsregel ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta_1 &= y_j + \frac{h}{2} f(t_j + \frac{h}{2}, \eta_1) \\ y_{j+1} &= y_j + h f(t_j + \frac{h}{2}, \eta_1) \end{aligned}$$

Berechnen Sie einen Schritt mit der impliziten Mittelpunktsregel mit $h = 1$ für das Anfangswertproblem aus b).

d) Wir betrachten nun eine skalare und autonome Differentialgleichung, dass heisst die Differentialgleichung ist von der Form $y' = f(y)$ mit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, für diesen Fall, dass die implizite Mittelpunktsregel Konsistenzordnung 2 hat.