Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Beispielprüfung Lösungen

1. **a)** Die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Iterationen des Newton-Verfahrens für Gleichung (1) und $x^{(0)} = 1$ erfüllt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_0\colon \qquad x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} = x^{(n)} - \frac{(x^{(n)})^2 - x^{(n)} - 1}{2x^{(n)} - 1}.$$

Also folgt $x^{(1)} = 1 - {}^{-1}/_{-1} = 2$ und $x^{(2)} = 2 - {}^{1}/_{3} = {}^{5}/_{3}$.

b) ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = {}^{1}/_{2} \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 1 = {}^{1}/_{4} - {}^{3}/_{2} \neq 0.$$

Also gilt $f'(x^*) \neq 0$. Gemäss Satz I.2 und der Bemerkung I.2.2 in den Vorlesungsunterlagen ist die Konvergenzordnung 2. Die Folge konvergiert also quadratisch. Siehe auch Aufgabe 2 in Serie 2.

i) Konvergiert eine Folge quadratisch so konvergiert sie auch linear.

c) Da wir mit dem Interval $[1, 2]$ beginnen ist $x^{(0)} = 3/2$. Da $f(1) = -1 < 0$, $f(3/2) = -1/4 < 0$ und $f(2) = 1 > 0$ ist $x^{(1)} = (3/2 + 2)/2 = 7/4$. Da $f(7/4) = 5/16 > 0$ ist $x^{(2)} = (7/4 + 3/2)/2 = 13/8$.

2. **a)** Die quadratische Form lautet

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 13x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + (3x_2)^2.$$

Die Matrix ist folglich positiv definit.

b) Aus obiger Zerlegung folgt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Wir lösen zuerst $Ly = b$, dies ergibt $y = (1,\ -3)^T$. Dann lösen wir $L'x = y$ was $x = (3,\ -1)^T$ ergibt.

3. **a)** Die Spalten sind linear unabhängig. Das lineare Ausgleichsproblem besitzt deshalb eine eindeutige Lösung.

Bitte wenden!

b) Mit Gram-schmidt erhält man

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / 2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

und

$$e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}.$$

Die QR-Zerlegung lautet also

$$A = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Es gilt

$$Q^T b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

also

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Die diskrete Fouriertransformation von a ist

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} 10 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Die diskrete Fouriertransformation von c ist

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 30 \\ -2+2i \\ -2 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

Die Fouriertransformierte von b erhalten wir durch Punktweise Division von $\hat{c}$ und $\hat{a}$. Es gilt also $\hat{b} = (3,1,1,1)$. Wir erhalten b durch die Inverse Fouriertransformation

$$b = {}^1\!/_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \hat{b} = {}^1\!/_2(3,1,1,1).$$

b)
```
function [b]= Konvolutionsgleichung(a,c)
     b=ifft(fft(c)./fft(a));
end
```

5.

- Es gilt

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)dx = {}^1\!/_2 \int_0^\pi sin(2x)dx = {}^1\!/_2(-{}^1\!/_2 cos(2x)|_0^\pi) = 0.$$

- $$\langle \sin, \sin \rangle = \int_0^\pi \sin(x)^2 dx = {}^1\!/_2 \int_0^\pi 1 - \cos(2x)dx = {}^\pi\!/_2$$

  und

$$\langle \cos, \cos \rangle = \int_0^\pi \cos(x)^2 dx = {}^1\!/_2 \int_0^\pi 1 + \cos(2x)dx = {}^\pi\!/_2.$$

Die Funktionen $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin$ und $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos$ bilden daher eine Orthonormalbasis von V. Die Bestapproximation ist daher gegeben durch

$$\tilde{f} = \frac{2}{\pi}\left(\langle f, \sin\rangle \sin + \langle f, \cos\rangle \cos\right)$$

Durch partielle Integration erhält man

$$\langle f, \sin\rangle = \int_0^\pi x\sin(x)dx = -xcos(x)|_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)dx = \pi + sin(x)|_0^\pi = \pi$$

und

$$\langle f, \cos\rangle = \int_0^\pi x\cos(x)dx = xsin(x)|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)dx = 0 + \cos(x)|_0^\pi = -2.$$

Also

$$\tilde{f} = \frac{2}{\pi}\left(\pi\sin - 2\cos\right) = 2\sin - \frac{4}{\pi}\cos.$$

Bitte wenden!

6. Da die Quadraturformel exakt ist für die Polynome $1, x, x^2$ gilt

$$\begin{array}{rcrcl} w_0 & + & w_1 & = & 1 \\ & & {}^2\!/_3 w_1 & = & {}^1\!/_2 \\ & & {}^4\!/_9 w_1 & = & {}^1\!/_3. \end{array}$$

Die Gewichte $(w_0, w_1) = ({}^1\!/_4, {}^3\!/_4)$ erfüllen die Gleichungen.

7. **a)** 2.

b) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^2 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist die Funktion $y = (y_1, y_2)\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $y(t) = (y_1(t), y_2(t)) = (x(t), x'(t))$ für alle $t \in [0, \infty)$ die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(y(t)) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_1(t) + y_2(t) + 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \infty), \\ y(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\eta_1 = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0 + \frac{h}{2}, \eta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \eta_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

und daher

$$\begin{pmatrix} 1 & -{}^1\!/_2 \\ -{}^1\!/_2 & {}^1\!/_2 \end{pmatrix} \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ {}^1\!/_2 \end{pmatrix}.$$

Also folgt

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und daher

$$y_1 = y_0 + h f(t_0 + \frac{h}{2}, \eta_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} y(x_{j+1}) &= y(x_j) + h y'(x_j) + \frac{h^2}{2} y''(x_j) + \mathcal{O}(h^3) && (1) \\ &= y(x_j) + h f(y(x_j)) + \frac{h^2}{2} f'(y(x_j) y'(x_j) + \mathcal{O}(h^3) && (2) \\ &= y(x_j) + h f(y(x_j)) + \frac{h^2}{2} f'(y(x_j)) f(y(x_j)) + \mathcal{O}(h^3), && (3) \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$
\begin{aligned}
f(\eta_1) &= f(y_j + \frac{h}{2} f(\eta_1)) = f(y_j) + f'(y_j)\frac{h}{2} f(\eta_1) + \mathcal{O}(h^2) && (4)\\
&= f(y_j) + \frac{h}{2} f'(y_j)(f(y_j) + \mathcal{O}(h)) + \mathcal{O}(h^2) && (5)\\
&= f(y_j) + \frac{h}{2} f'(y_j) f(y_j) + \mathcal{O}(h^2). && (6)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
y_{j+1} &= y_j + h f(\eta_1) && (7)\\
&= y_j + h(f(y_j) + \frac{h}{2} f'(y_j) f(y_j) + \mathcal{O}(h^2)) && (8)\\
&= y_j + h f(y_j) + \frac{h^2}{2} f'(y_j) f(y_j) + \mathcal{O}(h^3). && (9)
\end{aligned}
$$

Folglich gilt für den Fehler mit $y(x_j) = y_j$

$$
\begin{aligned}
\delta_{j+1} &= y(x_{j+1}) - y_{j+1} && (10)\\
&= y(x_j) + h f(y(x_j)) + \frac{h^2}{2} f'(y(x_j)) f(y(x_j)) + \mathcal{O}(h^3) && (11)\\
&\quad -(y_j + h f(y_j) + \frac{h^2}{2} f'(y_j) f(y_j) + \mathcal{O}(h^3)) && (12)\\
&= \mathcal{O}(h^3). && (13)
\end{aligned}
$$