Prof. Dr. A. Jentzen
M. Sprecher

Musterlösung 11

1. **a)**
```
%compute integral with Matlab
%up to an Absolute tolerance of 10^(-16)
f=@(x) exp(x.^2);
exact=integral(f,0,1,'AbsTol',10^(-16));
```

b)
```
function [quad] = myquad(f,a,b,x,w,n)
%myquad computes integral over the interval [a,b]
%of f with the composition of the the rule with nodes x
%and weights w on the interval [-1,1]

%number of quadrature points of
m=size(x,2);

%length of interval
d=b-a;

%nodes of composition
X=linspace(a+d/(2*n),b-d/(2*n),n)'*ones(1,m)+ones(n,1)*x/n*d/2;

%weights of composition
W=ones(n,1)*w/n*d/2;

quad=sum(sum(f(X).*W));

end
```

c)
```
f=@(x) exp(x.^2);
a=0;
b=1;
exact=integral(f,a,b,'AbsTol',10^(-16));
n=9;

midp=zeros(1,n);
trap=zeros(1,n);
```

Bitte wenden!

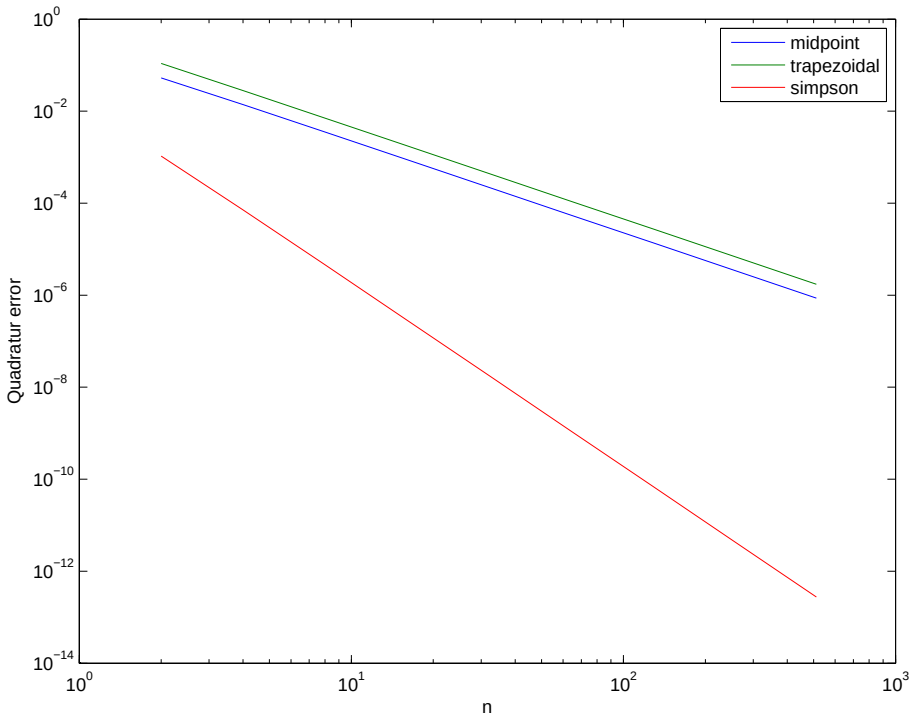
```
simp=zeros(1,n);

for i=1:n
   %midpoint
   midp(i)=myquad(f,a,b,0,2,2^i);
   %trapez
   trap(i)=myquad(f,a,b,[-1,1],[1 1],2^i);
   %simpson
   simp(i)=myquad(f,a,b,[-1 0 1],[1 4 1]/3,2^i);
end
l=2.^(1:n);
midp=abs(midp-exact);
trap=abs(trap-exact);
simp=abs(simp-exact);

loglog(l,midp,l,trap,l,simp)
legend('midpoint','trapezoidal','simpson')
xlabel('n')
ylabel('Quadratur error')
print('-dpdf','aufgabe1.pdf')

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung midpoint')
polyfit(log(l),log(midp),1)

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung trapez')
polyfit(log(l),log(trap),1)

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung simpson')
polyfit(log(l),log(simp),1)
```

Die beobachtete Konvergenzordnung des Mittelpunkts- und Trapezverfahrens beträgt 2. Die beobachtete Konvergenzordnung des Simpsonverfahrens beträgt 4. Die Konvergenzordnung entspricht also jeweils gerade der Konsistenzordnung.

2. **a)** Es gilt $(w_0, w_1) = (1, 1)$. Für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ gilt

$$I[x^i] = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^i + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^i = \begin{cases} 2 & i = 0 \\ 0 & i = 1 \\ \frac{2}{3} & i = 2 \\ 0 & i = 3 \end{cases} = \int_{-1}^{1} x^i dx.$$

Siehe nächstes Blatt!



Die Konsistenzordnung ist also 4. Dies ist maximal für zwei Stützpunkte. (Siehe Seite 11 in den Vorlesungsunterlagen.)

b) Wir folgen der Konstruktion auf Seite 11 in den Vorlesungsunterlagen. Es gilt

$$l_1(x) = \frac{(x+\frac{\sqrt{15}}{5})(x-\frac{\sqrt{15}}{5})}{(0+\frac{\sqrt{15}}{5})(0-\frac{\sqrt{15}}{5})} = 1 - \frac{5}{3}x^2$$

und daher

$$w_1 = \int_{-1}^{1} 1 - \frac{5}{3}x^2 dx = 2 - 2\frac{1}{3}\frac{5}{3} = \frac{8}{9}.$$

Aus Symmetriegründen gilt $w_0 = w_2$ und da die Quadraturregel exakt für Polynome vom Grad 0 ist muss $w_0+w_1+w_2 = 2$ gelten. Es folgt $w_0 = w_2 = \frac{2-\frac{8}{9}}{2} = \frac{5}{9}$. Für $i = \{0, 1, \ldots, 5\}$ gilt

$$I[x^i] = \frac{5}{9}\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^i + \frac{10}{9}(0)^i + \frac{5}{9}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^i = \begin{cases} 2 & i=0 \\ 0 & i=1 \\ \frac{2}{3} & i=2 \\ 0 & i=3 \\ \frac{2}{5} & i=4 \\ 0 & i=5 \end{cases} = \int_{-1}^{1} x^i dx.$$

Die Konsistenzordnung ist also mindestens 6. Dies ist maximal für drei Stützpunkte. (Siehe Seite 11 in den Vorlesungsunterlagen.)

Bitte wenden!

c) Damit das Verfahren Konsistenzordnung 4 hat muss die Quadraturegel exakt sein für die Standardbasis $1, x, x^2, x^3$ von $\mathcal{P}_3$. Die Bedingungen lauten

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 2 && (1)\\
-w_1 - \frac{1}{3}w_2 + \frac{1}{3}w_3 + w_4 &= 0 && (2)\\
w_1 + \frac{1}{9}w_2 + \frac{1}{9}w_3 + w_4 &= \frac{20}{9} && (3)\\
-w_1 - \frac{1}{27}w_2 + \frac{1}{27}w_3 + w_4 &= 0 && (4)
\end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (1/4, 3/4, 3/4, 1/4)$. Da die Quadraturformel nicht exakt ist fuer $p(x) = x^4$:

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{28}{54} = I[x^4]$$

hat Sie Konsistenzordnung 4.

3. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in \mathbb{R}\colon\ p(t) &= y_0 L_0(t) + y_1 L_1(t) + y_2 L_2(t)\\
&= y_0 \frac{(t - 1/3)(t-1)}{1/3} + y_1 \frac{t(t-1)}{-2/9} + y_2 \frac{t(t - 1/3)}{2/3}\\
&= y_0(3t^2 - 4t + 1) + y_1(-9/2 t^2 + 9/2 t) + y_2(3/2 t^2 - 1/2 t)\\
&= t^2\left(3y_0 - 9y_1/2 + 3y_2/2\right) + t\left(9y_1/2 - 4y_0 - y_2/2\right) + y_0
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\int_0^1 p(t)\,dt = y_0(1 - 2 + 1) + y_1(-3/2 + 9/4) + y_2(1/2 - 1/4) = 3/4 y_1 + 1/4 y_2$$

c) Es gilt $(w_0, w_1, w_2) = (0, 3/4, 1/4)$. Ist nämlich $q \in \mathcal{P}_2$ beliebig, $y_0 = q(0), y_1 = q(1/3)$ und $y_2 = q(1)$, dann ist $p = q$ und daher folgt aus a) und b), dass

$$\int_0^1 q(t)\,dt = \int_0^1 p(t)\,dt = \frac{3y_1}{4} + \frac{y_2}{4} = w_0 q(0) + w_1 q(\tfrac{1}{3}) + w_2 q(2) = Q^{(0,3/4,1/4)}_{(0,1/3,1),[0,1]}(q).$$

Die Quadraturformel $Q^{(0,3/4,1/4)}_{(0,1/3,1),[0,1]}$ ist also exakt für jedes $q \in \mathcal{P}_2$ und somit von Ordnung 3.

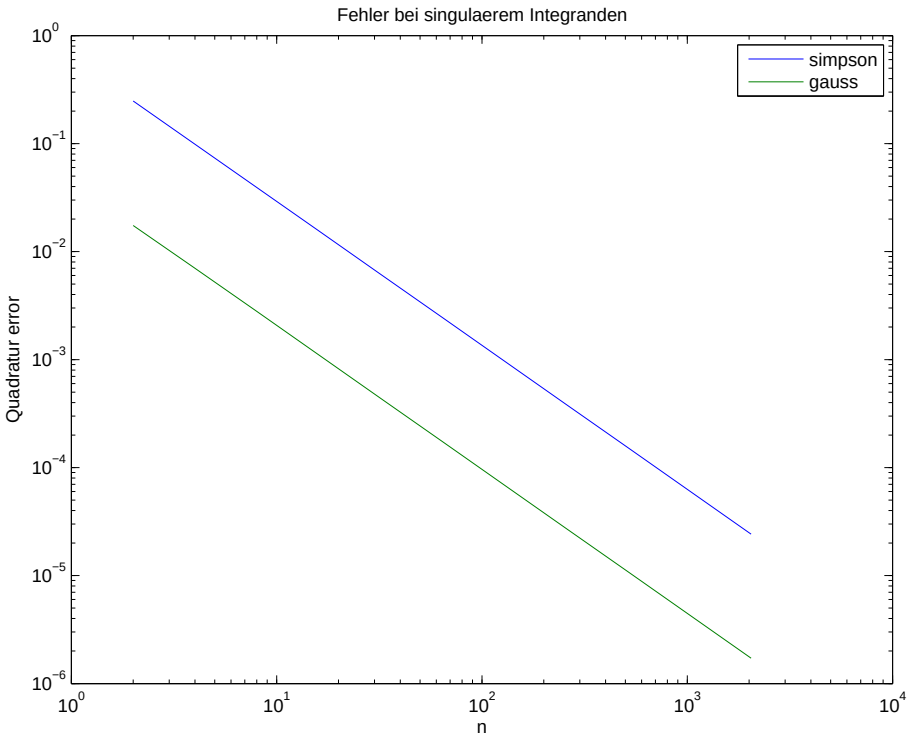
Siehe nächstes Blatt!

4. **a)**

```
%f4.m
%Funktion in Aufgabe 4
function [y] = f4(x)
    y=sin(x).*x.^(-2/3);
    %f4(0) ist nicht definiert und die obige
    %Formel ergibt in diesem Fall NaN (Not
    %a number). f4 kann aber stetig fortgesetzt
    %werden indem wir f4(0)=0 setzen.
    %Wir ersetzen daher im folgenden alle
    %NaN durch 0
    i=isnan(y);
    y(i)=0;
end


%Aufgabe4a.m
n=11;
a=0;
b=2*pi;
exact=integral(@f4,a,b,'AbsTol',10^(-16));

simp=zeros(1,n);
gauss=zeros(1,n);

for i=1:n
   %simpson
   simp(i)=myquad(@f4,a,b,[-1 0 1],[1 4 1]/3,2^i);
   %gauss
   gauss(i)=myquad(@f4,a,b,[-sqrt(3/5) 0 sqrt(3/5)],[5 8 5]/9,2^i);
end
l=2.^(1:n);
simp=abs(simp-exact);
gauss=abs(gauss-exact);

loglog(l,simp,l,gauss)
title('Fehler bei singulaerem Integranden')
legend('simpson','gauss')
xlabel('n')
ylabel('Quadratur error')
print('-dpdf','nosmooth.pdf')

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung simpson')
```

Bitte wenden!

```
polyfit(log(l),log(simp),1)

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung gauss-legendre')
polyfit(log(l),log(gauss),1)
```



Die beobachtete Konvergenzordnung beträgt in beiden Fällen $\approx \frac{4}{3}$. Man erhält hier keine höhere Konvergenzordnung da die Funktion bei 0 nicht genügend oft differenzierbar ist.

b) Da $x = t^3$ gilt $dx = 3t^2 dt$ und daher

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^{(2\pi)^{\frac{1}{3}}} \frac{\sin(t^3)}{t^2} 3t^2 dt = \int_0^{(2\pi)^{\frac{1}{3}}} 3\sin(t^3) dt.$$

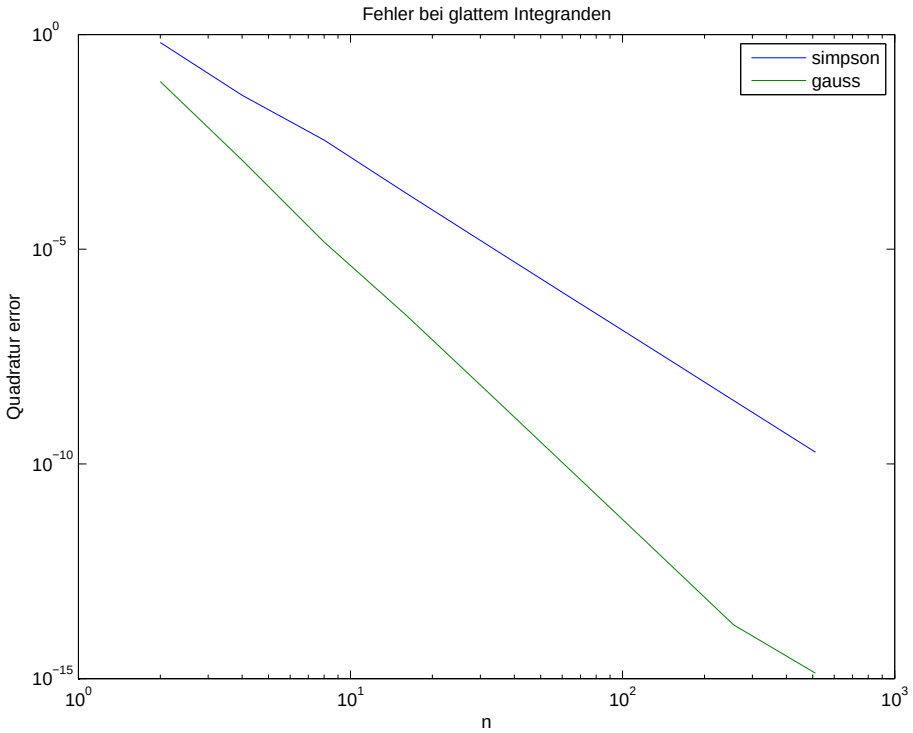
Wir erhalten nun den Code für Aufgabe 4b indem wir den Code aus Aufgabe 4a entsprechend anpassen

```
%Aufgabe4b.m
fsmooth=@(x) 3*sin(x.^3);

n=9;
a=0;
b=(2*pi)^(1/3);
```

Siehe nächstes Blatt!

```
exact=integral(fsmooth,a,b,'AbsTol',10^(-16));

simp=zeros(1,n);
gauss=zeros(1,n);

for i=1:n
   %simpson
   simp(i)=myquad(fsmooth,a,b,[-1 0 1],[1 4 1]/3,2^i);
   %gauss
   gauss(i)=myquad(fsmooth,a,b,[-sqrt(3/5) 0 sqrt(3/5)],[5 8 5]/9,2^i
end
l=2.^(1:n);
simp=abs(simp-exact);
gauss=abs(gauss-exact);

loglog(l,simp,l,gauss)
title('Fehler bei glattem Integranden')
legend('simpson','gauss')
xlabel('n')
ylabel('Quadratur error')
print('-dpdf','smooth.pdf')

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung simpson')
polyfit(log(l),log(simp),1)

%Konvergenzordnungen abschaetzen
disp('Konvergenzordnung gauss-legendre')
polyfit(log(l),log(gauss),1)
```

Die beobachtete Konvergenzordnung beträgt 4 für das Simpsonverfahren und 6 für G_3.


Fehler bei glattem Integranden
simpson
gauss
Quadratur error
n
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}