Musterlösung 8

1. Wir müssen die drei Eigenschaften einer Norm zeigen:

- $\|f\| > 0$ für $f \in X\backslash\{0\}$,
- $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in X$,
- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Die erste Eigenschaft folgt direkt aus der Eigenschaft iii) des Skalarprodukts ($\langle f, f\rangle > 0$ für $f \in X\backslash\{0\}$). Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\| &= \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f\rangle} && (1)\\
&= \sqrt{\alpha^2\langle f, f\rangle} && (2)\\
&= |\alpha|\sqrt{\langle f, f\rangle} && (3)\\
&= |\alpha|\|f\|. && (4)
\end{aligned}$$

Die zweite Eigenschaft ist also erfüllt. Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt die dritte Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \sqrt{\langle f+g, f+g\rangle} && (5)\\
&= \sqrt{\langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle} && (6)\\
&\leq \sqrt{\langle f, f\rangle + 2\sqrt{\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle} + \langle g, g\rangle} && (7)\\
&= \sqrt{(\sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle})^2} && (8)\\
&= \sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle} && (9)\\
&= \|f\| + \|g\|. && (10)
\end{aligned}$$

2. **a)** Nach Vorausssetzung existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i.$$

Mit

$$\langle f, \Phi_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i, \Phi_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \Phi_i, \Phi_j\rangle = \alpha_j$$

folgt die Behauptung.

Bitte wenden!

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Phi_j \rangle && (11)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \langle \Phi_i, \Phi_j\rangle && (12)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 && (13)\\
&= \sum_{i=1}^{n} |\langle \Phi_i, f\rangle|^2. && (14)
\end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\langle \Phi_i, f - f_n\rangle = \langle \Phi_i, f\rangle - \langle \Phi_i, f_n\rangle = \langle \Phi_i, f\rangle - \langle \Phi_i, f\rangle = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Die Funktion $f - f_n$ steht also senkrecht auf allen Basisfunktionen Φ_i und somit auch auf X_n. Da nun also $f - f_n \perp g - f_n$ für alle $g \in X_n$ folgt mit Pythagoras

$$\|f - f_n\|^2 + \|f_n - g\|^2 = \|f - g\|^2 \tag{15}$$

und somit $\|f - f_n\| < \|f - g\|$ für alle $g \in X_n \backslash \{f_n\}$.

d) Mit $g = 0$ folgt aus (15), dass $\|f_n\| \leq \|f\|$. Somit folgt mit b)

$$\|f\|^2 \geq \|f_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \Phi_i, f_n\rangle|^2.$$

Es gilt

$$\langle \Phi_i, f_n\rangle = \langle \Phi_i, \sum_{j=1}^{n} \langle f, \Phi_j\rangle \Phi_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f, \Phi_j\rangle \langle \Phi_i, \Phi_j\rangle = \langle \Phi_i, f\rangle$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle \Phi_i, f_n\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle \Phi_i, f\rangle|^2.$$

Insgesamt folgt also

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\langle \Phi_i, f\rangle|^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. **a)** Es gilt

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) \\ &= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\ &= 2T_n(x)x \end{aligned}$$

und somit $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. Durch die Rekursionsgleichung ist sofort ersichtlich, dass $T_n(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist.

b) Von der Definition erhalten wir $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$. Wir berechnen die Polynome mit der 3-Term Rekursion $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ und erhalten

$$T_2(t) = 2x^2 - 1 \tag{16}$$
$$T_3(t) = 4x^3 - 3x \tag{17}$$
$$T_4(t) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \tag{18}$$
$$T_5(t) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \tag{19}$$

Es gilt also $(a_5, \ldots, a_0) = (16, 0, -20, 0, 5, 0)$.

c) Es muss gelten

$$n\arccos(x_i) = \frac{\pi}{2} + m\pi$$

mit $m \in \mathbb{Z}$. Also

$$x_i = \cos(\frac{2i-1}{2n}\pi).$$

d) Durch Induktion erhält man, dass $\deg(T_n) = n$ mit Leitkoeffizient 2^{n-1}. Allgemein besitzt ein Polynom vom Grad n mit n Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ die Darstellung $c_n \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ mit $c_n \in \mathbb{R}$. Durch Koeffizientenvergleich folgt nun $c_n = 2^{n-1}$.

e) Da $|\cos(y)| \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $|T_n(x)| \leq 1$ und folglich

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\right| = |2^{-(n-1)}T_n(x)| = 2^{-(n-1)}|T_n(x)| \leq 2^{-(n-1)}.$$

f) Für $m \neq n$ gilt (wir verwenden die Substitutionen $x = cos(y)$ und die trigono-

Bitte wenden!

metrische Formel aus a))

$$
\begin{aligned}
\langle T_m, T_n \rangle &= \int_{-1}^{1} \cos(m \arccos(x)) \cos(n \arccos(x)) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{\pi}^{0} \cos(my) \cos(ny) \frac{-\sin(y)}{\sin(y)} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \cos((m+n)y) + \cos((m-n)y) dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m+n} \sin((m+n)y)|_0^{\pi} + \frac{1}{m-n} \sin((m-n)y)|_0^{\pi} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

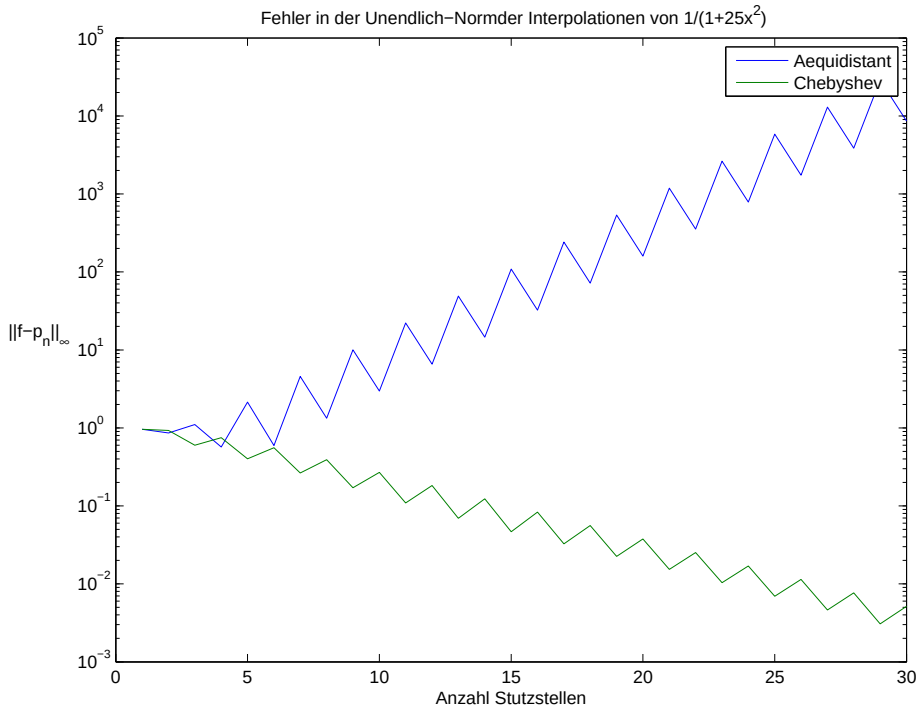
4.

```
%chebvsequi
%Skript um Interpolation mit Aquidistanten und
%Chebyshevstuetzstellen zu vergleichen
%hoechster Polynomgrad
m=30;
%Fehler bei aequidistanten Stuetzpunkten
err_equ=zeros(1,m);
%Fehler bei Chebyshev Stuetzpunkten
err_cheb=zeros(1,m);
%Function-handle
f=@(u) 1./(1+25*u.^2);
%Punkte an denen Interpolationsfehler gemessen wird
t=linspace(-1,1,10^4);
for n=1:m
    %Stuetzpunkte bestimmen
    x_equ=linspace(-1+1/n,1-1/n,n);
    x_cheb=cos(pi*linspace(1/2/n,1-1/2/n,n));
    %Fehler messen
    err_equ(n)=intererr(f,x_equ,t);
    err_cheb(n)=intererr(f,x_cheb,t);
end
    %Fehler plotten
    semilogy(1:m,err_equ,1:m,err_cheb);
    legend('Aequidistant','Chebyshev')
    title(['Fehler in der Unendlich-Norm'...
    'der Interpolationen von 1/(1+25x^2)'])
    xlabel('Anzahl Stutzstellen')
    ylabel('||f-p_n||_{\infty}','Rotation',...
        0,'HorizontalAlignment','right')
    print('-dpdf','ChebvsEqu.pdf');
```

Siehe nächstes Blatt!

```
function [err] = intererr(f,x,t)
    %Diese Funktion ermittelt den Interpolationsfehler
    %der Interpolation mit Stuetzstellen x
    %und Funktion f. Der Fehler wird bei den Punkten t
    %ermittelt und der maximale Fehler (L^\infty-Norm)
    %wird zurueckgeliefert

    %Funktion auswerten
    y=f(x);
    %Koeffizienten in Newton-basis ausrechnen
    c=my_interpol(x,y);
    %Interpolationspolynom auswerten
    val=my_poly_eval(c,x,t);
    %Fehler messen
    err=max(abs(f(t)-val));
end
```



Wie man sieht wächst der Interpolationsfehler bei äquidistanten Stützstellen exponentiel mit dem Grad des Polynoms, wohingegen der Interpolationsfehler bei Chebyshev-Stützpunkten exponentiel abnimmt.