**Name:**

D-ITET, D-MATL

# Prüfung Numerische Methoden, Sommer 2013

Prof. Arnulf Jentzen

- Maximale Punktzahl: $54 = 8 + 9 + 1 + 13 + 8 + 10 + 5$ Punkte.

# Viel Erfolg!

---

**1. (8 Punkte)**

**a)** Berechnen Sie die diskrete Faltung $(1, 2) * (3, 4)$ und die diskrete 2-periodische Faltung $(1, 2) *_2 (3, 4)$.

**b)** Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^4$ des Vektors $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Gilt $a_3 = -i$?

**c)** Sie haben Spaltenvektoren $a$ und $b$ der gleichen Länge in Matlab eingegeben. Geben Sie eine Matlabbefehlsfolge an, die mittels schneller Fouriertransformation die diskrete periodische Faltung von $a$ und $b$ zurückliefert.

**2. (9 Punkte)**

**a)** Berechnen Sie eine $QR$-Zerlegung der $2 \times 2$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

**b)** Berechnen Sie die 2-Kondition $\mathrm{cond}_2(B)$ der $2 \times 2$-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

**c)** Sie haben eine Matrix $C$ in Matlab eingegeben. Geben Sie einen Matlabbefehl an, der (approximativ) eine Singulärwertzerlegung von $C$ zurückliefert.

**3. (1 Punkt)**
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$. Sie haben einen Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^{m,1}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ in Matlab eingegeben. Geben Sie einen Matlabbefehl an, der (approximativ) die Lösung des kleinsten Quadrate Problems zu $A$ und $b$ zurückliefert.

**Bitte wenden**

**4. (13 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{R}.$$

Sei $\Phi_f$ die Iterationsfunktion des Bisektionsverfahren für $f$ and sei $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N}_0$, die Folge der Iterationen zu $\Phi_f$ und $x^{(0)} = (1, 2)$.

(a) Berechnen Sie $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$.

(b) Sei $y^{(k)} := {}^{(x_1^{(k)}+x_2^{(k)})}/_2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie eine natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ an, sodass

$$\forall\, k \geq l: \qquad |\sqrt{2} - y^{(k)}| \leq \frac{1}{100}. \tag{1}$$

Begründen Sie, warum das von Ihnen angegebene $l \in \mathbb{N}_0$ die Eigenschaft (1) besitzt.

(c) Konvergiert die Folge $\left(y^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ linear gegen $\sqrt{2}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**5. (8 Punkte)**
Sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \sin(\pi t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

(a) Berechnen Sie $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, sodass $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die Lösung des Interpolationsproblems

$$\forall\, i \in \{0, 1, 2\}:\ \ p({}^i/_2) = f({}^i/_2)$$

ist.

(b) Gilt die Fehlerabschätzung $\sup_{t\in[0,1]} |p(t) - f(t)| \leq \frac{\pi^3}{12}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

**6. (10 Punkte)**
Sei $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 2^x$ für alle $x \in [0, 2]$.

**a)** Sei $Q$ die Simpsonregel auf $[0, 2]$. Berechnen Sie $Q(f)$.

**b)** Sei $Q_1$ die Trapezregel auf $[0, 1]$, $Q_2$ die Trapezregel auf $[1, 2]$ und sei $\tilde{Q}$ die Zusammensetzung von $Q_1$ und $Q_2$. Berechnen Sie $\tilde{Q}(f)$.

**c)** i) Ist $\tilde{Q}$ von Ordnung 1? Begründen Sie Ihre Antwort.
ii) Ist $\tilde{Q}$ von Ordnung 2? Begründen Sie Ihre Antwort.
iii) Ist $\tilde{Q}$ von Ordnung 3? Begründen Sie Ihre Antwort.

**7. (5 Punkte)**
Sei $y_0 = 1,\ T = 1$, sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = -x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und sei $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(y(t)), \qquad t \in [0, T], \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie die explizite Euler-Approximation $(Y_k)_{k\in\{0,1,2\}}$ für das AWP (2) mit Schrittweite $h = {}^1/_2$.

(b) Geben Sie ein $p \in \mathbb{N}$ an, sodass das explizite Euler-Verfahren mit algebraischer Ordnung $p$ gegen $y$ konvergiert.

(c) Berechnen Sie die Heun-Approximation $(Z_k)_{k\in\{0,1\}}$ für das AWP (2) mit Schrittweite $h = 1$.