Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 10

1. Sei $C := (c_{i-j})_{i,j} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine zirkulante Matrix, wobei $c = (c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ und $c_i := c_{i+n}$ für alle $i \in \{-(n-1), \ldots, -1\}$, $\omega_n := e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ die n-te Einheitswurzel und für $k \in \mathbb{Z}$

$$\vec{\omega}_n^k := \begin{pmatrix} \omega_n^{k\cdot 0} \\ \omega_n^{k\cdot 1} \\ \vdots \\ \omega_n^{k\cdot(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Zeigen Sie, dass

$$C\vec{\omega}_n^k = \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_n^{-jk}\right) \vec{\omega}_n^k$$

gilt. Dass heisst $\vec{\omega}_n^k$ ist ein Eigenvektor von C zum Eigenwert $\sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega_n^{-jk}$.

2. Sei $c \in \mathbb{C}^n$ und $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wie in Aufgabe 1. Schreiben Sie eine Matlabfunktion, die zum Eingabevektor $c \in \mathbb{C}^n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ (mittels FFT) das Produkt Cx berechnet.

3. **a)** Schreiben Sie je ein Matlabprogram, welche die diskrete Faltung $a * b$ zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{C}^n$

i) direkt mittels der Definition der Faltung,

ii) mithilfe der Matlabbefehle *fft* und *ifft*.

berechnet.

b) Vergleichen Sie nun die beiden Algorithmen für die Vektoren $a = (1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$ und $b = (n, n-1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ für die Werte $n = 2^0, 2^1, \ldots, 2^{12}$. Plotten Sie die Rechenzeiten in einem Diagramm.

Bitte wenden!

4. *Filter*

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion $my\_freq\_filter(y, k)$ welches für ein Signal $y \in \mathbb{R}^n$ die diskrete Fouriertransformation berechnet, die $n - (2k + 1)$ Terme der Fouriertransformation, welche zu den höchsten Frequenzen gehören zu 0 setzt, und das Ergebnis wieder zurücktransformiert.

b) In der Datei $signal.mat$ auf der Vorlesungshomepage finden Sie ein Signal $y \in \mathbb{R}^{256}$ testen Sie ihre Funktion aus a) für $k = 5, 10, 20$ indem Sie das Signal selbst und das Signale, welche Sie erhalten wenn Sie den Filter darauf anwenden plotten.

c) Sie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\mathbb{R}^n \ni x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto f(x) = \left(\frac{x_{k+1} + 2x_k + x_{k-1}}{4} \right)_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

wobei $x_{-1} := x_{n-1}$ und $x_n := x_0$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = a *_n x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $*_n$ die n-periodische Konvolution bezeichnet.

d) Schreiben Sie eine Matlabfunktion $my\_filter(y, j)$ welche

$$\underbrace{f(\dots f(}_{j\ mal} y) \dots)$$

berechnet. Verwenden Sie wieder das Signal y und plotten Sie die Ergebnisse für $j = 10, 50, 100$.