Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 11

1. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^1 e^{x^2} dx. \tag{1}$$

a) Benützen Sie die Matlabfunktion *quad* (bei neueren Matlabversionen *integral*) um das Integral (1) zu approximieren. Verwenden Sie als Argument die absolute Toleranz 10^{-16}.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion $myquad(f, a, b, x, w, n)$ welche gegeben die Stützpunkte x und Gewichte w einer Quadraturregel für das Interval $[-1, 1]$, das Ergebnis des zusammengesetzten Verfahrens mit n Intervallen gleicher Länge für das Integral $\int_a^b f(x)dx$ zurückliefert.

c) Berechnen Sie die Quadraturfehler des zusammengesetzten Mittelpunkts-, Trapez uns Simpsonverfahrens für das Integral (1) und $n = 2, 2^2, \ldots, 2^{11}$. Plotten Sie die Ergebnisse in einem geeigneten Diagram. Welche Konvergenzordnungen beobachten Sie?

2. Wir betrachten Quadraturregeln für Integrale auf dem Interval $[-1, 1]$. Bestimmen Sie für die Stützpunkte

a) $(x_0, x_1) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

b) $(x_0, x_1, x_2) = (\frac{-\sqrt{15}}{5}, 0, \frac{\sqrt{15}}{5})$

c) $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$

die Gewichte $(w_0, \ldots, w_n)$ so, dass die entsprechende Quadraturregel eine möglichst hohe Konsistenzordnung hat. (Siehe Seite 11 in den Vorlesungsunterlagen.)

3. Seien $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das Polynom $p \in \mathcal{P}_2$ mit $p(0) = y_0,\ p(1/3) = y_1$ und $p(1) = y_2$.

b) Berechnen Sie $\int_0^1 p(t)dt$ in Abhängigkeit von y_0, y_1, y_2.

Bitte wenden!

c) Geben Sie Gewichte $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ an, sodass die dazugehörige Quadraturregel mit Stützpunkten $(0, 1/3, 1)$ auf dem Interval $[0, 1]$ Konsistenzordung 3 hat.

4. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{2}{3}}} dx \tag{2}$$

a) Sei G_3 das Gauss-Legendre-Verfahren mit drei Knoten (Siehe Aufgabe 2b). Berechnen Sie das Integral (2) mithilfe des zusammengesetzten Simpsonverfahrens sowie des Verfahrens durch Zusammensetzung von G_3 für $n = 2, 2^2, \ldots, 2^9$ Intervalle gleicher Länge. Welche Konvergenzordnungen beobachten Sie?

b) Führen Sie die algebraische Substitution $x = t^3$ durch um die Singularität des Integranden in (2) zu eliminieren. Berechne das neue Integral wiederum numerisch wie in Teilaufgabe a. Welche Konvergenzordnungen beobachten Sie nun?