Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 2

1. Seien $F,\ \Phi_1,\ \Phi_2, \Phi_3 : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = xe^x - 1,\ \Phi_1(x) = e^{-x},\ \Phi_2(x) = \frac{1+x}{1+e^x},\ \Phi_3(x) = x + 1 - xe^x$$

für alle $x \in [0,1]$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Φ_1 und Φ_2 konsistente Fixpunktiterationen für die Gleichung $F(x) = 0$ definieren.

a) Zeigen Sie, dass Φ_3 ebenfalls eine konsistente Fixpunktiterationen für die Gleichung $F(x) = 0$ definiert und dass Φ_1, Φ_2 und Φ_3 einen gemeinsamen Fixpunkt x^* besitzen. Gibt es noch weitere Fixpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $0.5 < x^{(0)} < 0.65$. Beweisen Sie, dass die Folge der Iterationen $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ zu Φ_1 und $x^{(0)}$ linear gegen x^* konvergiert und dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|x^{(k)} - x^*| \leq 1.6|x^{(k)} - x^{(k-1)}|$$

gilt. Welche Abbruchbedingung würden Sie wählen, wenn $|x^{(k)} - x^*|$ kleiner als 10^{-15} sein soll?

c) Führen Sie 5 Iterationen zu Φ_3 mit den Startwerten $0.5, 0.6$ und 0.7 durch. Was beobachten Sie? Versuchen Sie das Beobachtete zu erklären indem Sie $\Phi_3'(x^*)$ betrachten.

d) Für welche Startwerte $x^{(0)}$ konvergiert die Fixpunktiteration definiert durch Φ_3 gegen x^*?

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, x^* eine Nullstelle von f und $f'(x^*) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann das Newtonverfahren für die Gleichung $f(x) = 0$ in einer Umgebung von x^* Konvergenzordnung 2 hat.

3. **a)** Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Iterationen die mit Ordnung $p \in (1,\infty)$ gegen $x^* \in \mathbb{R}$ konvergiert und sei $\epsilon_k := |x^{(k)} - x^*|$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Es gibt also ein $C \in (0,\infty)$, so dass $\epsilon_{k+1} \leq C\epsilon_k^p$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir nehmen nun an, dass $\epsilon_{k+1} \approx C\epsilon_k^p$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wenn im Schritt k der Fehler $\epsilon_k = 0.01 = 10^{-2}$

Bitte wenden!

ist, also der Fehler in der zweiten Nachkommastelle ist, wie groß ist dann der Fehler für ϵ_{k+1} und ϵ_{k+2}? Die Konstante C dürfen Sie vernachlässigen, d.h. Sie können $C = 1$ annehmen.

b) Wie viele Schritte n benötigen die Iterationsverfahren für $p = 2$ oder $p = 3$ also etwa um $\epsilon_k = 0.01 = 10^{-2}$ auf $\epsilon_{k+n} = 10^{-15}$ zu reduzieren?

c) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Iterationen die linear gegen $x^* \in \mathbb{R}$ konvergiert und sei $\epsilon_k := |x^{(k)} - x^*|$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Es gibt also ein $C \in (0, 1)$, so dass $\epsilon_{k+1} \leq C\epsilon_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Wir nehmen nun an, dass $\epsilon_{k+1} \approx C\epsilon_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und dass $C = 0.7$ ist. Wie viele Schritte n benötigt das Iterationsverfahren etwa um $\epsilon_k = 0.01 = 10^{-2}$ auf $\epsilon_{k+n} = 10^{-15}$ zu reduzieren?

4. **a)** Implementieren Sie das Newtonverfahren für die Gleichung $f(x) = 0$ mit

$$f(x) := \cosh(x)\cos(x) + 1$$

und Startwert $x_0 = 100$. Sei $\bar{x}$ die berechnete Näherung für eine Nullstelle von f. Berechnen Sie $f(\bar{x})$. Gilt $f(\bar{x}) \approx 0$?

b) Implementieren Sie das Newtonverfahren für die Gleichung $f(x) = 0$ mit

$$f(x) := \sin(10^{-10}x) - 0.5$$

und Startwert $x_0 = 10^{10}$. Benutzen Sie als Abbruchkriterium einmal die Schätzung $|x^{(k)} - x^{(k+1)}|$ für den absoluten Fehler und einmal die Schätzung $\left|\frac{x^{(k)} - x^{(k+1)}}{x^{(k+1)}}\right|$ für den relativen Fehler. Wieviele Iterationsschritte benötigt man jeweils wenn man als Toleranz das Maschinenepsilon eps verwendet?

5. Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - \cos(x_2) \\ x_2 - \sin(x_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion F genau eine Nullstelle besitzt.
Tipp: Leiten Sie aus dem entsprechenden Gleichungssystem eine Gleichung her, die nur eine der beiden Variabeln enthält.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von F und formulieren Sie das Newtonverfahren für die Gleichung $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

c) Schreiben Sie eine Funktion `newtonstep.m`, welche einen Schritt des Newtonverfahrens berechnet. Sie können dazu das Template auf der Homepage verwenden.

Siehe nächstes Blatt!

d) Erstellen Sie ein Skript `newton.m`, welches Newtoniterationen durchführt und abbricht falls 1000 Iterationen durchgeführt wurden oder falls

$$\|\mathbf{x}^{(K+1)} - \mathbf{x}^{(K)}\|_2 < 10^{-10}$$

gilt. Sie können als Vorlage das Skript `fixIt.m` aus Serie 1 Aufgabe 2b verwenden. Führen Sie das Programm mit Startwert $x^{(0)} = (1,\ 1)$ aus und geben Sie das Resultat bis auf 8 Stellen genau an.

6. In einer gemischten Schaltung (siehe Bild) mit ohmschen Widerständen R_1, R_2 und R_3 betrage der Gesamtwiderstand RG_3. Vertauscht man die Widerstände R_1 und R_3 bzw. R_2 und R_3 so beträgt der Gesamtwiderstand RG_2 bzw. RG_1. Aus der Theorie über Stromkreise wissen wir, dass

$$RG_1 = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}},\ RG_2 = R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} \text{ und } RG_3 = R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

gilt. Die dimensionslosen Grössen seien $r_1 > 0, r_2 > 0$ und $r_3 > 0$ bzw. $g_1 > 0, g_2 > 0$ und $g_3 > 0$, d.h $R_i = r_i\Omega$ und $RG_i = g_i\Omega$ für $i = 1, 2$ und 3 (wobei Ω das Einheitenzeichen für den elektrischen Widerstand ist).

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{r} := (r_1,\ r_2,\ r_3) \in (0,\infty)^3$ ein Fixpunkt der Funktion $\Phi : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$(0,\infty)^3 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1 - \frac{x_2 x_3}{x_2 + x_3} \\ g_2 - \frac{x_1 x_3}{x_1 + x_3} \\ g_3 - \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

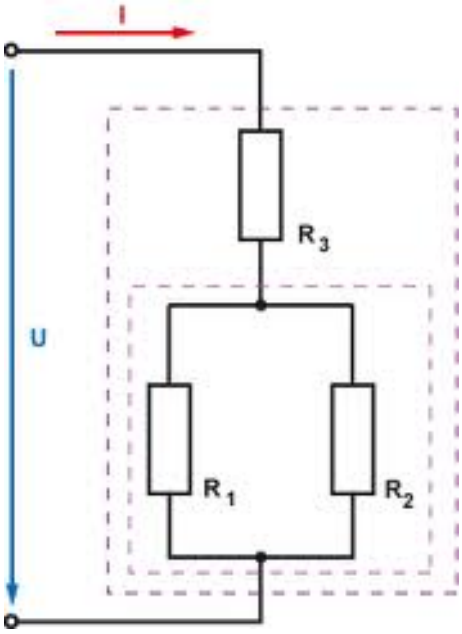
ist.

b) Zeigen Sie für alle $\mathbf{x} \in (0,\infty)^3$ die Abschätzung $\|D\Phi(\mathbf{x})\|_\infty < 1$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung von $\mathbf{r}$ die Fixpunktiteration zu Φ linear gegen $\mathbf{r}$ konvergiert.

d) Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für $A_\varepsilon := [\varepsilon, g_1] \times [\varepsilon, g_2] \times [\varepsilon, g_3]$ gilt, dass $\Phi(A_\varepsilon) \subset A_\varepsilon$. Zeigen Sie dann, dass $\Phi|_{A_\varepsilon} \colon A_\varepsilon \to A_\varepsilon$ eine Kontraktion ist.

e) Zeigen Sie, dass die Widerstände R_1, R_2 und R_3 eindeutig durch die Widerstände RG_1, RG_2 und RG_3 bestimmt sind.


I
U
R3
R1
R2