Dr. Käppeli
M. Sprecher

Serie 3

1. Sei $G : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(0, \infty) \ni x \mapsto x^x - 10 \in \mathbb{R}.$$

a) Schreiben Sie ein Matlab Programm, dass die Nullstelle x^* von G im Interval $[2, 3]$ mit der Bisektionsmethode approximiert.

b) Sei $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \in \mathbb{R}^2$ und sei $y^{(k)} := {}^{(x_1^{(k)}+x_2^{(k)})}/_2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wie viele Schritte l benötigt man, damit der Fehler $|\, x^* - y^{(k)} \,|$ für alle $k \geq l$ sicher kleiner als 10^{-10} ist?

2. **a)** Schreiben Sie eine Matlabfunktion *[L,U]=myLU(A)* welche für eine quadratische Matrix A die LU-zerlegung (falls vorhanden) zurückliefert.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion *mydet(A)* welche für eine quadratische Matrix A die Determinante zurückliefert.
Tipp: Matlabbefehle *diag* und *prod*.

c) Schreiben Sie eine Matlabfunktion *myLUsolve(A,b)* welche für eine quadratische Matrix A und einen Spaltenvektor b die Lösung (falls vorhanden) des Gleichungssystem $Ax = b$ zurückliefert.

d) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{60\times 60} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{60}.$$

Schreiben Sie eine Matlabskript welche die Matrizen A und b generiert (Sie können dazu den Matlabbefehl *tril* verwenden), $b = Ax$ auswertet, eine Approximation $\tilde{x}$ der Lösung für das Gleichungssystems $A\tilde{x} = b$ berechnet und den Betrag des Fehlers in der 2-Norm, i.e. $\|x - \tilde{x}\|_2$, zurückgibt. Interpretieren Sie das Resultat.

Bitte wenden!

e) Erstellen Sie mit dem Matlabbefehl *rand* eine 1000×1000 Matrix A und einen zufälligen 1000×1 Spaltenvektor b und lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ einmal mithilfe der LU-Zerlegung, einmal indem Sie zuerst die Inverse von A berechnen und einmal mit dem Backslashoperator „\“. Vergleichen Sie die Rechenzeiten der drei Lösungsmethoden.
Hinweise:

- Verwenden Sie für die LU-Zerlegung den Matlabbefehl *lu* und für die Rück- und Vorwärtssubstitutionen den Backslashoperator
- Die Rechenzeit eines Befehls können Sie mittels `tic; Befehl(e); toc` bestimmen

f) Schreiben Sie eine Matlabfunktion *myLUsolve_pivot(A,b)* welche die LU-zerlegung mit Kolonnenmaximums-Strategie löst.

3. Sei $v \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}$ und

$$H(v) = \mathbb{I} - 2\frac{vv^H}{\|v\|_2^2}$$

die entsprechende Householder-Reflexion.

a) Zeigen Sie, dass $H(v)$ unitär ist.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von $H(v)$.

c) Bestimmen Sie von Hand eine QR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

sowohl mit Householder-Reflexionen als auch mit Givens-Rotationen. Geben Sie auch die Zwischenschritte an.

4. Sei $\mu \in \mathbb{R}$ und

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\mu^2 + 1 \leq \text{cond}_2(T(\mu)) \leq \mu^2 + 2$$

gilt.
Hinweis: Die 2-Norm einer Matrix A berechnet sich mit $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$, wobei λ_{max} der grösste Eigenwert von $A^T A$ sei.

Siehe nächstes Blatt!

b) Sei $\varepsilon > 0$ und

$$S(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass

$$1 \leq \text{cond}_2(S(\varepsilon)) \leq (1+\varepsilon)^2$$

gilt.

c) Nehmen Sie nun an, dass $0 < \varepsilon \ll 1$. Bestimmen Sie die LU-Zerlegung von $S(\varepsilon)$ und schätzen Sie die Kondition von L ab. Ihr Kollege löst das Gleichungssystem $S(\varepsilon)x = b$ wobei $b \in \mathbb{R}^2$ numerisch mittels LU-Zerlegung, d.h. er löst zuerst $Ly = b$ und dann $Ux = y$. Warum sollte man ihn davon abraten?

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ und (Q, R) eine QR-Zerlegung von A. Zeigen Sie, dass

$$\text{cond}_2(Q) = 1 \qquad \text{und} \qquad \text{cond}_2(R) = \text{cond}_2(A)$$

gilt. Sie lösen nun das Gleichungssystem aus c), dass heisst $S(\varepsilon)x = b$, indem Sie zuerst $Qy = b$ und dann $Rx = y$ lösen. In welcher Hinsicht ist dieser Lösungsansatz besser als derjenige aus c)?