Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 4

1. **a)** Schreiben Sie ein Matlabfunktion $L = myCHOL(A)$ welche für eine symmetrische positiv definitie Matrix A die Matrix L der Cholesky-Zerlegung $A = L^T L$ zurückliefert. Sie finden den Algorithmus in den Vorlesungsunterlagen oder unter Wikipedia.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion $x = myCHOL_solve(L, b)$, welche bei gegebener Cholesky-Zerlegung von A die Lösung von $Ax = b$ zurückliefert.
Hinweis: Vor- und Rückwärtssubstitution.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$ von Rang n und $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Zeigen Sie, dass $A^T A$ symmetrisch und positiv definit ist. Folgern Sie daraus, dass die Normalengleichung $A^T A\bar{x} = A^T b$ eine eindeutige Lösung $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Ist die Matrix AA^T auch symmetrisch positiv definit?

b) Zeigen Sie die folgende Identität:

$$\|A\bar{x} - b\|_2^2 + \|A(x - \bar{x})\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2.$$

Hinweis: Pythagoras

c) Folgern Sie aus b), dass $\bar{x}$ das Funktional $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$$

minimiert.

d) Zeigen Sie

$$\nabla\varphi := \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix} = A^T Ax - A^T b.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j (A^T A)_{jk} x_k - \sum_{j=1}^{n} x_j (A^T b)_j + \frac{1}{2} b^T b$$

und leiten Sie nach x_i ab.

Bitte wenden!

3. *QR-Zerlegung*
Wir wollen die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ und $RangA = n$ durchführen.

Hierzu soll

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

als anschauliches Beispiel dienen.

a) Berechnen Sie (von Hand!) die QR-Zerlegung von A mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisreungs-Verfahren.

b) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `[Q,R] = myQR_mgs(A)` welche eine QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit dem modifizierten Gram-Schmidt-Orthogonalisierungs-Verfahren durchführt.

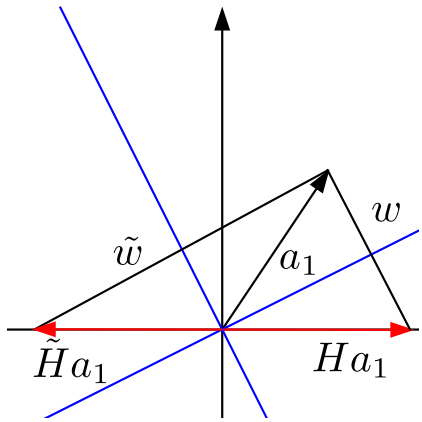
c) Berechnen Sie (von Hand!) die QR-Zerlegung von A mit einer Householder-Spiegelung

$$H = \mathbb{I} - 2\frac{ww^*}{w^*w}.$$

D.h. A soll in obere Dreiecksform gebracht werden mit einer Householder-Spiegelung H:

$$R = HA.$$

Beachten Sie, dass es immer zwei mögliche Spiegelungen gibt um das gewünschte zu erreichen (s. Skizze). Geben Sie beide H und $\tilde{H}$ an.



d) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `[Q,R] = myQR_householder(A)` welche eine QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Householder-Spiegelungen durchführt.
Schwierig!

Siehe nächstes Blatt!

4. An einen Widerstand R werden der Reihe nach die Spannungen

$$(U_1, \ldots, U_5) = (5V, 10V, 15V, 20V, 25V)$$

angebracht und jeweils ein Strom

$$(I_1, \ldots, I_5) = (1.1A, 1.9A, 2.7A, 4A, 5.2A)$$

gemessen. Gemäss dem Ohmschen Gesetz müsste gelten $U_i = RI_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Wegen Messfehler gibt es aber kein R welches alle 5 Gleichungen erfüllt. Bestimmen Sie nun die Lösung R des kleinsten Quadrate Problems, dass heisst

$$R = \operatorname*{argmin}_{R \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{5} (U_i - RI_i)^2.$$

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem. Was ist in unserem Fall die Matrix A und der Vektor b? Bestimmen Sie dann die Lösung R.