Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 6

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \backslash \text{Kern}(A) \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|_2} \in \mathbb{R}^n.$$

Die entsprechende Fixpunktiteration wird auch Potenziteration genannt und kann, unter geeigneten Annahmen an A, verwendet werden um den betragsmässig grössten Eigenwert und einen dazugehörigen Eigenvektor zu approximieren.

a) Charakterisieren Sie die Fixpunkte von f.

b) Implementieren Sie die Potenziteration in einer Funktion *potenziteration.m* die als Eingabe eine quadratische Matrix A und einen Vektor x erhält und eine Approximation für den betragsmässig grössten Eigenwert und seinen dazugehörigen Eigenvektor zurückgibt. Verwenden Sie als Abbruchkriterium $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-10}$. Testen Sie ihre Funktion an der 100×100 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen werden benötigt? Wie gross ist der Fehler zwischen dem berechneten Eigenwert und dem Eigenwert der mit dem Matlabbefehl *eig* berechnet wird?

2. Gegeben sei die zirkulante Shiftmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Bitte wenden!

a) Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von $\mathbf{S}$ auf dem Einheitskreis von $\mathbb{C}$ liegen, d.h. den Betrag 1 haben.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I})$.

b) Beweisen Sie, dass die Potenzmethode für alle nicht-trivialen Startvektoren $\mathbf{z}^0$ nicht konvergiert. Ein Startvektor $\mathbf{z}^0$ heisst nicht-trivial, falls er kein Eigenvektor von $\mathbf{S}$ ist.

c) Warum ist dies kein Gegenbeispiel zum Theorem über die Konvergenz der direkten Potenzmethode?

3. *Brücke im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie*

Es sollen die natürlichen Eigenschwingungen einer Modell-Brücke untersucht werden. Die Brücke wird durch das zweidimensionale Tragwerk aus Abbildung 1 mit 18 elastischen Stäben und acht Gelenken modelliert, das an zwei Lagern rechts und links befestigt ist. Die Stäbe und Gelenke sollen wie in der Abbildung gekennzeich-

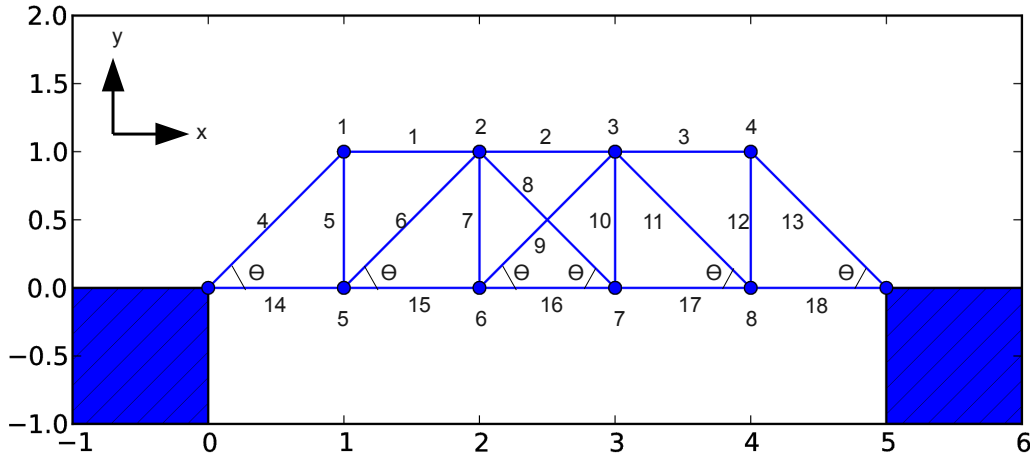

Abbildung 1

net sein. Die Länge der Stäbe sei $l_1, ..., l_{18} \in R$ und die Koordinaten der Gelenke $\boldsymbol{r}_i = [x_i, y_i] \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1, ..., 8$. Unter der Annahme, dass die Masse M der Brücke zu gleichen Teilen in den Gelenken konzentriert ist (Gelenk Masse $m = 1$ kg), während die Stäbe masselos sind, können wir uns unter dem Tragwerk auch ein Masse-Feder- System (mit sehr steifen Federn) vorstellen. Wir nehmen weiterhin an, dass äussere Kräfte $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_8 \in \mathbb{R}^2$ an den Gelenken $\boldsymbol{r}_1, ..., \boldsymbol{r}_8 \in \mathbb{R}^2$ wirken - in der Aufgabe wird es die Schwerkraft sein - und wollen die entstehende Deformation berechnen. Um das Problem zusätzlich zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die durch die Deformation verursachten Winkeländerungen zwischen den Stäben vernachlässigt

Siehe nächstes Blatt!

werden können. Zusammenfassend, wird unser Brücken-Modell nur für kleine Deformationen eine akzeptable Näherung sein, da die Veränderung der Gelenkpositionen und ihre Auswirkung auf die Richtung der Kräfte nicht berücksichtigt werden.

a) Stellen Sie die (Kräfte-) Gleichgewichts-Gleichungen für alle Gelenke auf.

b) Wir schreiben nun die in a) aufgestellte Kräftebilanz im Gleichungsystem

$$\boldsymbol{p} = E\boldsymbol{f}, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{f} = [f_1, ..., f_{18}]^T \in \mathbb{R}^{18\times 1}$ und $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_8]^T \in \mathbb{R}^{16\times 1}$. $E \in \mathbb{R}^{16\times 18}$ ist die die sog. Gleichgewichtsmatrix.
Durch die Deformation des Tragwerks ändert sich die Länge l_k des k-ten Stabs in $l_k + \Delta l_k$. Wir nehmen an, dass die Deformation des Stabs mit dem Hookeschen Gesetz beschrieben werden kann. Dann ist die innere Kraft f_k wie folgt mit der Deformation verbunden:

$$f_k = \eta \frac{\Delta l_k}{l_k}. \tag{2}$$

Der Proportionalitätsfaktor η (das sog. Elastizitätsmodul) beschreibt die Steifigkeit des Stabs. Die Längenänderung berechnen sich aus den ursprünglichen Positionen $\boldsymbol{r}_i$ (ohne äussere Kraft) und den neuen (zu bestimmenden) Gleichgewichtspositionen $\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\Delta r}_i$ der einzelnen Gelenke. Die $\boldsymbol{\Delta r}_i, i = 1, ..., 8$ sind die sog. Verschiebungen. Verbindet etwa der k-te Stab die Gelenke $\boldsymbol{r}_i$ und $\boldsymbol{r}_j$, dann ist $l_k = \|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|$ und die neue Länge $l_k + \Delta l_k$ errechnet sich aus

$$(l_k + \Delta l_k)^2 = \|(\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\Delta r}_i) - (\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{\Delta r}_j)\|^2. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass man durch Vernachlässigung quadratischer Terme in Δl_k und $\|\boldsymbol{\Delta r}_i - \boldsymbol{\Delta r}_j\|$ die Längenänderung auf

$$\Delta l_k = \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|}(\boldsymbol{\Delta r}_i - \boldsymbol{\Delta r}_j). \tag{4}$$

vereinfachen kann.

c) Der Vektor $\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|}$ in (4) ist gerade wieder der Richtungsvektor des k-ten Stabs mit entsprechendem Vorzeichen. Schreibt man die Verschiebungen in einem Vektor $\boldsymbol{\Delta r} = [\boldsymbol{\Delta r}_1, ..., \boldsymbol{\Delta r}_8]$ (und zwar in der gleichen Reihenfolge wie im Vektor $\boldsymbol{p}$), ergibt sich aus (4) die Beziehung

$$\boldsymbol{\Delta l} = E^T \boldsymbol{\Delta r} \tag{5}$$

zwischen dem Vektor $\boldsymbol{\Delta l} = [\Delta l_1, ..., \Delta l_{18}]^T \in R^{18\times 1}$ und dem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\Delta r} \in \mathbb{R}^{16x1}$ mit derselben Gleichgewichtsmatrix E wie zuvor. Bezeichnen wir mit $D \in \mathbb{R}^{18\times 18}$ die Diagonalmatrix mit den Längen l_k auf der Diagonalen, so lautet das Hookesche Gesetz (2)

$$\boldsymbol{f} = \eta D^{-1} \boldsymbol{\Delta l}. \tag{6}$$

Bitte wenden!

Damit können wir die Gleichung zwischen dem Vektor $\boldsymbol{p}$ der äusseren Kräfte und dem Verschiebungsvektor $\boldsymbol{\Delta r}$ wie folgt schreiben

$$\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{\Delta r}, \tag{7}$$

wobei $A = \eta E D^{-1} E^T \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ die Steifigkeitsmatrix des Tragwerks ist.
Stellen Sie (7) in Matlab auf, lösen Sie das System und plotten Sie die Gleichgewichts Konfiguration. Verwenden Sie hierzu das Template $bridge_template.m$, lösen Sie das Gleichungsssystem mit dem Backslashoperator und stellen Sie die Gleichgewichts Konfiguration mithilfe der Matlabfunktion $plot_bridge.m$ dar.

d) Nun wollen wir die natürlichen Eigenschwingungen der Brücke untersuchen. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Verschiebungvektor auf.

e) Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$\boldsymbol{\Delta r} = \boldsymbol{\Delta r_0} + \cos(\sqrt{\lambda}t)\boldsymbol{v}$$

die Bewegungsgleichung in d) löst (wobei $\boldsymbol{\Delta r_0}$ die Verschiebung der Gleichgewichts Konfiguration aus c) ist, λ ein beliebiger Eigenwert von A und $\boldsymbol{v}$ ein dazugehöriger Eigenvektor ist).

f) Bestimmen Sie mit der inversen Potenzmethodeden den kleinsten Eigenwert (und den dazugehörigen Eigenvektor) der Matrix A. Benützen Sie dazu den Code aus Aufgabe 1. Simulieren Sie zwei Perioden der Eigenschwingung der Brücke. Übergeben Sie dazu der Matlabfunktion $simulate_bridge.m$ eine 16×100-Matrix die für alle $1 \leq i \leq 100$ in der i-ten Spalte den Verschiebungsvektor zum Zeitpunkt $t_i = \frac{i-1}{n-1}\frac{4\pi}{\sqrt{\lambda}}$ enthält.