Dr. R. Käppeli
M. Sprecher

Serie 7

1. **a)** Berechnen Sie per Hand das Arnoldi-Verfahren (Seite 13 in den Vorlesungsunterlagen) für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

und den Startvektor $x = (0, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$ bis das Verfahren abbricht.

b) Berechnen Sie Eigenvektoren und Eigenwerte von H_k und daraus 2 Eigenvektoren und Eigenwerte von A.

c) Geben Sie eine Basis des 4-ten Krylov-Raums zu A und x an.

2. Geben Sie $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ an, sodass $\mathbb{R} \ni x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{R}$ die Lösung des polynomiellen Interpolationsproblems zu $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1, 2)$ und $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (-4, -1, 0, 5)$ ist. Lösen Sie diese Aufgabe auf drei Arten.

a) Indem Sie die Lagrange-Polynome verwenden.

b) Indem Sie das Gleichungssystem für die Koeffizienten in der Newton Basis aufstellen und lösen.

c) Indem Sie dividierte Differenzen verwenden.

3. **a)** Schreiben Sie eine Matlab-Funktion $my\_interpol(x, y)$ welches die Koeffizienten $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Newton-Interpolation für die Stützstellen $(x_0, x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und Werte $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ zurückgibt. (siehe Seite 5 in den Vorlesungsunterlagen)

b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion $my\_poly\_eval(c, x, t)$ welches zu vorgegebenen Koeffizenten $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Newton-Interpolation mit Stützstellen $(x_0, x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $t \in \mathbb{R}$ das Interpolationspolynom $\sum_{i=0}^{n} c_i N_i$ an der Stelle t auswertet. (siehe Seite 5 in den Vorlesungsunterlagen). Schreiben Sie dann ihre Funktion so um, dass Sie das Polynom an verschiedenen Stellen t gleichzeitig auswerten kann.

Bitte wenden!

c) Wir betrachten nun die Stützstellen $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_i = -1 + \frac{2i+1}{n+1}$ und die dazugehörigen Lagrange-Polynome L_i für $i \in \{0, \ldots, n\}$. Plotten Sie die Lagrangepolynome für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ im Interval $[-1, 1]$. Verwenden Sie dazu ein sehr feines Gitter (z.b. ≈ 1000 Punkte) auf welchem Sie die Interpolationspolynome auswerten.

d) Erstellen Sie einen halblogarithmischen Plot (Mit dem Matlabbefehl $semilogy$) der Lebesgue-Konstante $\Lambda_{x_0,\ldots,x_n}([-1, 1])$ in Abhängigkeit von $n = 1, 2, \ldots, 20$.