Lösung 1

1. Vektoridentitäten

a) Man kann komponentenweise überprüfen, dass die Vektoren $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$ übereinstimmen. Diese Rechnung vereinfacht sich, wenn man ein orthogonales Koordinatensystem derart wählt, dass $\mathbf{a} = (a_1, 0, 0)$ und $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ und $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

b) Ähnlich wie a) durch direktes Nachrechnen. Alternativ: $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle$ ist gerade gleich

$$\det\big(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\big) = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt die Behauptung aus der Tatsache, dass die Determinante sich nicht ändert, wenn man die Spaltenvektoren einer geraden Permutation unterzieht.
Geometrische Interpretation: $\big|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\big|$ ist das Volumen des Parallelogramms, das von den drei Vektoren aufgespannt wird.

2. Fliehkräfte

a) Für die Drehbewegung gilt

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\omega_0^2 \, \mathbf{r}_1.$$

Andererseits

$$m \, \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm^2 \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \right) = -3 \, \frac{Gm^2}{d_0^3} \, \mathbf{r}_1.$$

Analog für die beiden anderen Massen. Die Bewegungsgleichungen sind also erfüllt, falls

$$\omega_0^2 = \frac{3\,Gm}{d_0^3}.$$

b) Wir bezeichnen die Ortsvektoren der Ecken mit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Der Massenmittelpunkt M hat dann Ortsvektor $\mathbf{M} = (m_A + m_B + m_C)^{-1}(m_A\mathbf{A} + m_B\mathbf{B} + m_C\mathbf{C})$. Wie in 2a) gilt für eine Drehbewegung um M mit Winkelgeschwindigkeit ω_0

$$\ddot{\mathbf{A}} = -\omega_0^2(\mathbf{A} - \mathbf{M}) \ .$$

Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes $\mathbf{A}$ ist

$$m_A\ddot{\mathbf{A}} = \mathbf{F}_{\mathrm{res},A} = Gm_Am_B\frac{\mathbf{B}-\mathbf{A}}{|\mathbf{B}-\mathbf{A}|^3} + Gm_Am_C\frac{\mathbf{C}-\mathbf{A}}{|\mathbf{C}-\mathbf{A}|^3} \tag{1}$$

$$= \frac{Gm_A(m_A+m_B+m_C)}{d_0^3}(\mathbf{M}-\mathbf{A}) \ , \tag{2}$$

wobei d_0 die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks bezeichnet. Also ist die resultierende Kraft $\mathbf{F}_{\mathrm{res},A}$ in A auf M gerichtet und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes zu M. Wir finden für ω_0

$$\omega_0^2 = G\frac{m_A+m_B+m_C}{d_0^3} \ .$$

Mit dieser Wahl von ω_0 sind die entsprechenden Gleichungen für $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ ebenfalls erfüllt.

3. Bewegung in einem Zentralfeld

Wir untersuchen

$$\ddot{\mathbf{r}} = -h(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Wir bezeichnen in dieser Aufgabe den Drehimpuls mit $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

a) Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\big) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}.$$

Der erste Term verschwindet, da das Vektorprodukt antisymmetrisch ist. Also ist der Drehimpuls immer genau dann erhalten, wenn $\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = 0$, d.h. genau dann wenn $\ddot{\mathbf{r}} \propto \mathbf{r}$.
Aus der Erhaltung des Drehimpulses können wir mit Aufgabe 1 b) schliessen:

$$\langle \mathbf{l},\, \mathbf{r}\rangle = \langle \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}},\, \mathbf{r}\rangle = \langle \mathbf{r} \times \mathbf{r},\, \dot{\mathbf{r}}\rangle = 0,$$

d.h. die Bewegung erfolgt in der zu $\mathbf{l}$ orthogonalen Ebene (der Fall $\mathbf{l} = 0$ ist speziell).

b) Sei H eine Stammfunktion von h, d.h. $H'(r) = h(r)$, dann ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tfrac{1}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 + H(r)\Big) = \langle \dot{\mathbf{r}},\, \ddot{\mathbf{r}}\rangle + h(r)\,\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial r_i}\,\frac{\partial r_i}{\partial t}.$$

Mit $\frac{\partial r}{\partial r_i} = \frac{r_i}{r}$ folgt $\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial r_i}\,\frac{\partial r_i}{\partial t} = \langle \mathbf{r}/r,\, \dot{\mathbf{r}}\rangle$, und damit die Behauptung.
Bezüglich Polarkoordinaten ist die Energie gleich

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2r^2} + H(r),$$

wobei $l = r^2\,\dot{\vartheta}$ die Norm des Drehimpulses ist. Da $\dot{r}^2 \geq 0$, folgt

$$\frac{l^2}{2r^2} + H(r) \leq E.$$

Dies definiert je nach den Werten für l und E einen Bereich von "erlaubten" und "verbotenen" Werten für r.

c) **Fall** $h(r) = r$. Die Differentialgleichungen sind $\ddot{r}_i = -r_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und haben die allgemeine reelle Lösung $r_i(t) = r_i(0)\cos(t) + \dot{r}_i(0)\sin(t)$. Für $\mathbf{l} = 0$, d.h. $\mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}$ kollinear, beschreibt die Lösung eine harmonische Schwingung auf einer Geraden. Für $\mathbf{l} \neq 0$ beschreibt die Lösung eine Ellipse in der Ebene orthogonal zu $\mathbf{l}$, vgl. Lösung von Teilaufgabe a).
Fall $h(r) = -r$. Die Differentialgleichungen sind $\ddot{r}_i = r_i$ und haben die allgemeine reelle Lösung $r_i(t) = A_i e^t + B_i e^{-t}$ mit reellen Konstanten A_i, B_i bestimmt durch die Anfangswerte

$$A_i = \frac{1}{2}(r_i(0) + \dot{r}_i(0)) \quad \text{und} \quad B_i = \frac{1}{2}(r_i(0) - \dot{r}_i(0))\ ,$$

d.h. $r_i(t) = r_i(0)\cosh(t) + \dot{r}_i(0)\sinh(t)$. Fr $\mathbf{l} = 0$ liegen die Werte $\mathbf{r}(t)$ auf einer Geraden. Für $\mathbf{l} \neq 0$ beschreibt die Lösung eine Hyperbel in der Ebene orthogonal zu $\mathbf{l}$.

d) In diesem Fall ist $\mathbf{l} = 0$ und deshalb $r_2(t) \equiv r_3(t) \equiv 0$. Gemäss Teilaufgabe b) (mit $H(r) = r$) erfüllt r_1 die Gleichung

$$\frac{1}{2}\dot{r_1}^2 + |r_1| = \frac{1}{2}\dot{r_1}^2(0) + |r_1(0)| = \frac{3}{2}\ .$$

Diese separiert und hat als Lösung die periodische Fortsetzung von

$$r_1(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2 & 0 \leq t < \sqrt{3}+1 \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(t - 2\sqrt{3} - 1)^2 & \sqrt{3}+1 \leq t < 3\sqrt{3}+1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(t - 4\sqrt{3} - 1)^2 & 3\sqrt{3}+1 \leq t < 4\sqrt{3}\ . \end{cases}$$

Alternativ löst man die Gleichung

$$\ddot{r}_1 = \begin{cases} -1 & r_1 > 0 \\ 1 & r_1 < 0 \end{cases}$$

mit den Anfangswerten $r_1(0) = 1$ und $\dot{r}_1(0) = 1$. Die Lösung $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ oszilliert also mit Periode $4\sqrt{3}$ entlang der 1. Koordinatenachse auf dem Abschnitt $-\frac{3}{2} \leq r_1 \leq \frac{3}{2}$.

4. Gravitationskraft und Arbiet

a) Die Arbeit um ein Teilchen vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 (vom Erdmittelpunkt) zu bringen, ist gleich dem Negativen Wert der Änderung der potenziellen Energie der Gravitation. Wir haben

$$\begin{aligned} W &= -\Delta E_{pot} \\ &= -\int_{r_1}^{r_2} F_G(r) dr \\ &= GM_E m \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr \\ &= GM_E m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

b) Wir ersetzen GM_E durch gR_E^2, r_1 durch R_E, und r_2 durch $R_E + h$. Somit kriegen wir

$$W = mgR_E^2 \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + h} \right)$$

In der Näherung $h \ll R_E$ gilt $W = mgh$ was schon vom Gymnasium Physik bekannt ist.