D-BAUG Analysis II FS 2015
Dr. Meike Akveld

Serie 1

1. Beschreiben und zeichnen Sie das Niveaulinienportrait folgender Funktionen:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{x^2}{4} + y^2$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) := xy$

c) $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) := \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$

2. Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen.

a) f_{xyz} und f_{yzz}, wobei $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$,

b) f_{rss} und f_{rst}, wobei $f(r, s, t) = r\ \ln(rs^2t^3)$,

c) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$ für $z = u\sqrt{v - w}$,

d) alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $w(x, y, z) = \sinh(y + e^{x+z})$.

3. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche $z = \sqrt{y - x}$ im Punkt $P = (1, 2, 1)$.

4. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4y$.

a) Veranschaulichen Sie f mit Hilfe der Schnitte

$$S_{x=x_0}, x_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{und} \quad S_{y=y_0}, y_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

b) Skizzieren Sie die Niveaulinien.

c) Skizzieren Sie die Fläche, welche von $f(x, y)$ beschrieben wird.

d) Bestimmen Sie einen Punkt (x_*, y_*), so dass die Tangentialebene an den Punkt $(x_*, y_*, f(x_*, y_*))$ parallel zur (x, y)-Ebene liegt.

e) Wo durchstösst die Verlängerung der Flächennormalen durch $(1, 2, f(1, 2))$ die (x, y)-Ebene?

Bitte wenden!

5. **Die Wellengleichung.** Wenn Sie vom Meeresufer aus eine Momentaufnahme der Wellen machen, zeigt das Bild ein regelmässiges Muster aus Bergen und Tälern zu einem festen Zeitpunkt. Sie beobachten die periodische vertikale Bewegung im Raum als Funktion des Ortes. Wenn Sie sich ins Wasser stellen, können Sie fühlen, wie sich das Wasser mit den vorbeilaufenden wellen hebt und senkt. Sie beobacheten damit die periodische vertikale Bewegung in der Zeit. In der Physik wird diese wunderbare Symmertie durch die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

beschrieben. Dabei ist $w = w(x,t)$ die Höhe der Welle, x die Ortsvariable, t die Zeit und c die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen ausbreiten.

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung (1) sind.

a) $w(x,t) = \sin(x + ct)$,

b) $w(x,t) = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$,

c) $w(x,t) = \ln(2x + 2ct)$,

d) $w(x,t) = \tan(2x - 2ct)$,

e) $w(x,t) = f(u)$. Dabei ist f eine differnzierbare Funktion von u und $u = a(x+ct)$ mit der Konstanten a.

6. **Cobb-Douglas-Funktion.** Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion beschreibt die Produktion eines wirtschaftlischen Systems in Abhängigkeit der Arbeit L und dem Kapital K. Wir betrachten den Fall

$$Q(L,K) = cL^a K^b \tag{2}$$

mit $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ and $c = 1$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen Q_L und Q_K.

b) Zeichnen Sie die Niveaulinien der Produktionsfunktion im ersten Quadrant der LK-Ebene für $Q = 1, 2, 3$.

Siehe nächstes Blatt!

7. Online-Abgabe

1. Prüfungsaufgabe 4.a), Winter 2015. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = y^2 - (x^2 + z^2)$. Die Niveauflächen von f sind Paraboloiden mit Scheitel auf der y-Achse.

(a) wahr

(b) falsch

2. Die Ebene durch $P_1 = (1, 1, 1)$ mit Normalenvektor $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist dieselbe wie diejenige durch $P_2 = (3, 0, 1)$ mit Normalenvektor $n_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) wahr

(b) falsch

3. Jedes Paar von zwei verschiedenen Geraden in $\mathbb{R}^3$ definiert eine eindeutige Ebene.

(a) wahr

(b) falsch

4. Der maximale Definitionsbereich von $f(x, y) = 1 - |x - y|$ ist $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$.

(a) wahr

(b) falsch

Bitte wenden!

5. Die Niveaulinien der Funktion $f(x, y) = 2x - 3y$ sind Geraden..

(a) wahr

(b) falsch

Kurzlösungen: 3. x-y+2z=1; 4.d $(x_*, y_*) = (0, 1)$; 4.e $(x, y) = (3, -2)$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, den 23. Februar 2015 bis 12:15 Uhr im Fach Ihres Assistenten im HG J 68.

Siehe nächstes Blatt!

Allgemeine Informationen

Die **Einschreibung in die Übungsgruppen** erfolgt online. Alle Studenten, die sich unter `http://www.mystudies.ethz.ch` für die Vorlesung eingeschrieben haben, erhalten rechtzeitig per Email einen Link für die Übungsgruppeneinschreibung.

Die **Serien** müssen sauber und ordentlich auf DIN A4-Blättern verfasst werden. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt. Pro Serie wird sicher eine schriftliche Aufgabe korrigiert, je nachdem auch mehr. Welche, das dürfen Sie wählen. Bitte schreiben Sie deutlich auf die erste Seite Ihrer Abgabe, welche Aufgabe Sie gerne korrigiert haben möchten.

Die **Abgabe** erfolgt jeweils am Montag bis 12:15 Uhr im Fach Ihres Assistenten im HG J 68. So kann die Serie bis zur Übungsstunde korrigiert werden.

Zusätzlich gibt es **Multiple-Choice-Fragen**, die online zu beantworten sind. Zu diesem Zweck erhalten eingeschriebene Studenten per Email einen personalisierten Link.

Für jede Serie erhalten Sie nach dem Verstreichen des Abgabetermins eine **Musterlösung**. Bitte arbeiten Sie diese sorgfältig durch und vergleichen Sie sie mit Ihrer eigenen Lösung. Dabei auftretende Fragen können Sie im Rahmen der Semesterpräsenz oder in den Übungsstunden stellen.

Koordinator: Benjamin Miesch, `benjamin.miesch@math.ethz.ch`

Vorlesungshomepage: `https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/other/a2_baug/`