Serie 9

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Donnerstag/Freitag, 7./8. Mai in der Übungsstunde oder im Fach im HG J 68.

1. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\right).$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3, -1, 2)$ und $(2, 1, -1)$ verbindet.

2. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(5005x^{1000}y^3z, 15x^{1001}y^2z + 2y, 5x^{1001}y^3\right).$$

Berechnen Sie die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang der Strecke von $P = (1, 0, 1)$ nach $Q = (0, 1, 1)$.

3. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2z,\ z^2,\ x^3 + 2yz).$$

Man berechne die Arbeit von $\vec{F}$ entlang:

a) des geschlossenen Weges C_1, der aus drei Geradenstücken besteht: vom Punkt $P = (0, 0, 0)$ nach $Q = (1, 0, 0)$, dann von Q nach $R = (1, 1, 0)$ und von R zurück nach P.

Bitte wenden!

b) des Weges C_2, der durch

$$\vec{r}_2(t) = \left(\frac{\ln t}{\ln 2},\, t^{3/2},\, t\cos(\pi t)\right), \quad 1 \le t \le 4,$$

parametrisiert ist.

4. Ein Potentialfeld auf einem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet
Betrachte in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

a) Berechne das Umlaufintegral

$$I := \oint_\gamma K \cdot d\vec{r}$$

um den Kreis γ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $M := \binom{0}{0}$.

b) Zeige durch Konstruktion eines Potentials, dass K konservativ ist.

c) Verifiziere durch explizite Rechnung, dass K die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$$

erfüllt.

5. Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit Achse y und Scheitelpunkt $(0,1)$, die durch den Punkt (a,a) geht. Sei W_a der Weg von $(0,1)$ nach (a,a) entlang P_a. Man bestimme $a > 0$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x,y) \longmapsto \left(\frac{y-1}{x}, \frac{-1}{x}\right)$$

entlang W_a minimal wird.

Siehe nächstes Blatt!

Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den MC-Fragen bis **Freitag, 8.5.2015 um 15:00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und wird mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. – Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

---

1. Wie gross ist die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet? (Der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube.)

(a) π.

(b) 3π.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

2. Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x, y, z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

(a) $a = 0$.

(b) $a = -1/2$.

(c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

(e) Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Bitte wenden!

3. Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$, sodass

$$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

für alle geschlossene Wege W in D. Was folgt?

(a) Die Arbeit $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt von W ab.

(b) $\operatorname{rot} \vec{v} = (0, 0, 0)$

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

(d) $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Wege W.

(e) Es existiert eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ sind einfach zusammenhängend?

(a) $\mathbb{R}^2$

(b) Kreisscheibe

(c) Kreislinie

(d) $(\mathbb{R}^2 \setminus x\text{-Achse}) \cup \{(0, 0)\}$

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 2)\}$

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\}$

5. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

(a) $\mathbb{R}^3$

(b) Kugel

(c) Kugeloberfläche

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

(e) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, 3)\}$

(f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$