Serie 10

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Freitag, 15. Mai in der Übungsstunde oder im Fach im HG J 68.

1. Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme (alle diese Differenzialgleichungen sind separierbar):

a) $(x^2+3)\,y' + 2xy = x$, mit $y(0) = 1$.

b) $y' = xe^{x+y}$, mit $y(1) = -1$.

c) $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$, mit $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

d) $yy' = xy^2 + 2x$, mit $y(-1) = -1$. Existenzintervall?

e) $y' = \alpha\sqrt{y} - \beta y$, mit $y(0) = 0$.

f) $(x^2+x-6)\,y' = \frac{5}{2y}$, mit $x > 5$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$.

2. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'x^2 = -xy - x^2 - y^2.$$

Man finde die Lösung, die durch die Anfangsbedingung $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ gegeben ist, und bestimme deren Nullstellen. *Hinweis:* Substitution!

3. **a)** Bestimme ein ebenes Vektorfeld $v(x, y)$, welches als Feldlinien alle Kreise mit Mittelpunkt in $(1, 1)$ besitzt.

b) Welche Feldlinien besitzt das Vektorfeld $w(x, y) := (x, y + 1)$?

4. Finden Sie die Lösung $t \mapsto x(t)$ der Differenzialgleichung

$$\ddot{x} = -\dot{x}^2 + 1$$

mit Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$, und diskutieren Sie das Verhalten der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ für $t \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst $v(t) = \dot{x}(t)$.

Bitte wenden!

5. Voraussetzungen des Satzes über Existenz und Eindeutigkeit
Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \tag{1}$$

mit rechter Seite $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$. Diese Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und auch überall stetig. Wir untersuchen nun, inwiefern wir Satz 3.1 (Stammbach, Kapitel VII.3, p.18) anwenden können.

a) Ist f nach y stetig differenzierbar? Bzw. wo ist f_y nicht definiert?

b) Löse (1) mit Separation der Variablen unter der Annahme $y \neq 0$.

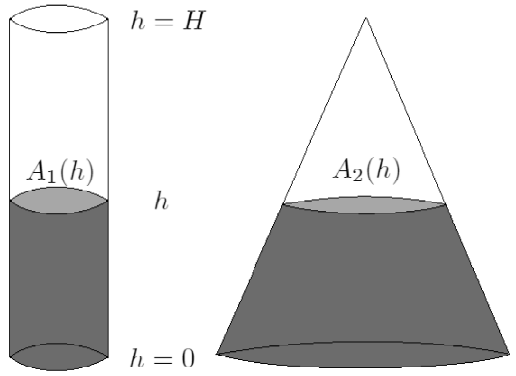
c) Es gibt eine *sehr* einfache Lösung von (1). Wie lautet sie?

d) Es gibt sogar unendlich viele Lösungskurven mit $y(0) = 0$. Nämlich?

6. Zwei Tanks mit dem selben Volumen V und der selben Höhe H sind beide ganz mit Wasser gefüllt. Nun werden beide Tanks durch zwei gleich grosse Löcher im Boden entleert. Das Niveau der Wasseroberfläche erfüllt die Differentialgleichung

$$\dot{h} = -\frac{\sqrt{h}}{A(h)}$$

wobei $A(h)$ die Querschnittsfläche des Tanks auf der Höhe h bezeichnet. Die Zeit zur vollständigen Entleerung des Zylindertanks betrage t^*. Wie lange dauert die vollständige Entleerung des Kegeltanks?

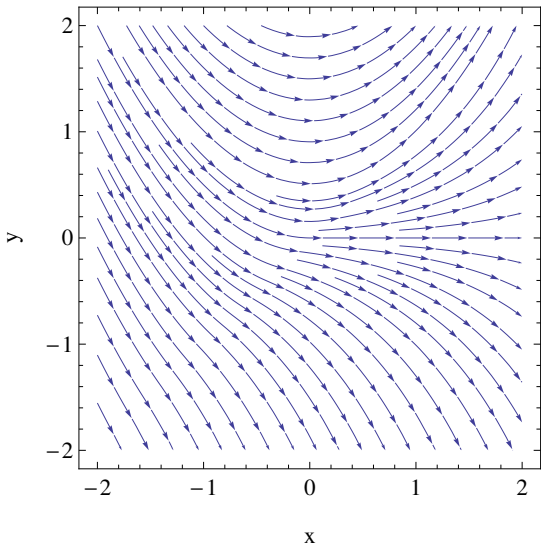


Siehe nächstes Blatt!

Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den MC-Fragen bis **Freitag, 15.5.2015 um 15:00 Uhr** ab.
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und wird mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. – Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

---

1. Welche der folgenden Differentialgleichungen hat das gegebene Richtungsfeld?



(a) $y' = x + y$

(b) $y' = x - y$

(c) $y' = \min\{x, y\}$

(d) $y' = \max\{x, y\}$

(e) $y' = |y| - |x|$

Bitte wenden!

2. Welche Ordnung hat die Differentialgleichung $y'' - x^2y' + y^4 = 0$?

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 2

(e) 4

3. Klicken Sie die **falsche** Aussage an:

Die Differenzialgleichung $\frac{x^2}{2}y'' - xy' + y = 0$

(a) besitzt die Funktion $y : x \to x$ als Lösung;

(b) besitzt die Funktion $y : x \to x^2$ als Lösung;

(c) besitzt unendlich viele Lösungen;

(d) besitzt genau zwei Lösungen.

Siehe nächstes Blatt!

4. Die Substitution

$$y(x) = g(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

in der Differenzialgleichung

$$x^2y + 2xy' + y'' = -2\cos(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

liefert...

(a) $x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(b) $-x^2g + 2xg' + g'' = -2\cos x$

(c) $g'' - g = -2\cos x$

(d) $g'' - xg' = -2\cos x$

5. Betrachten Sie die Tangente an den Graphen der Funktion $x \mapsto y(x)$ im Punkt $(x, y(x))$. Wie lautet die Differenzialgleichung dafür, dass diese Tangente die x-Achse im vorgegebenen Abstand c vom Punkt $(x, 0)$ schneidet?

(a) $x - \frac{y}{y'} = c$

(b) $\frac{y}{y'} = c$

(c) $yy' = c$

(d) $\left|\frac{y}{y'}\right| = c$

6. Welche der folgenden Aussagen über die Feldlinien eines nirgends verschwindenden differenzierbaren Vektorfelds K ist korrekt?

(a) Feldlinien werden immer mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen.

(b) Die Feldlinien sind orthogonal zu K.

(c) Feldlinien laufen immer zum Rand des Definitionsbereichs hin.

(d) Jeder Punkt liegt auf genau einer Feldlinie.

(e) Jede Feldlinie geht durch genau einen Punkt.