D-MAVT, ETH Zürich

Lineare Algebra

Lösung der Prüfung Winter 2012

Prof. N. Hungerbühler

1. **a)** Gauss-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & -8 & -1 & -1 \\ -1 & -8 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste, zweite und vierte Spalte können dabei als Pivot-Spalte betrachtet werden. Anstatt der zweiten Spalte kann aber auch die dritte Spalte genommen werden und anstatt der vierten Spalte die fünfte Spalte. Daher sind zum Beispiel

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$$

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$$

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}}}$$

verschiedene Basen von $\mathbb{R}^3$, die aus drei der gegebenen Vektoren bestehen.

b) Gemäss der Rechnung in a) ist der Rang von A gleich 3, somit gilt $\operatorname{Bild} A = \mathbb{R}^3$. Zum Beispiel ist somit

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$$

eine Basis von $\operatorname{Bild} A$ (siehe a)).

Für die Bestimmung einer Basis von $\operatorname{Kern} A$ beachte man, dass bei der Lösung des Gleichungssystems $Ax = 0$ die Variablen x_3 und x_5 als freie Parameter betrachtet werden können

(siehe Zeilenstufenform). Rückwärtseinsetzen liefert somit die Basis

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{37}{3} \\ \frac{11}{3} \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}}$$

von $\operatorname{Kern} A$.

c) Nach a) gilt $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A^\top = 3$. Somit ist der von den Spaltenvektoren von $A^\top$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^5$ dreidimensional. Daher müssen die drei Spalten von $A^\top$ linear unabhängig sein und eine Basis dieses Unterraums bilden. Eine gesuchte Basis ist also

$$\underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}}}.$$

2. **a)** Die Zahl 4 ist genau dann ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit 2, wenn $\dim \operatorname{Kern}\,(A - 4I_3) = 2$ gilt. Das ist äquivalent zu $\operatorname{Rang}\,(A - 4I_3) = 1$. Der Gauss-Algorithmus liefert:

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & -3-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix ist genau dann 1, wenn $\alpha = -3$ ist. Somit gilt $\underline{\underline{\alpha = -3}}$.

Variante: α so bestimmen, dass 4 mindestens eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist. Dann argumentieren, warum für dieses α die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 4 gleich 2 ist.

b) Bestimmung der Eigenwerte von A für $\alpha = -3$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)((1-\lambda)(5-\lambda)+3) \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = (4-\lambda)^2(2-\lambda) \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Somit sind $\underline{\underline{2 \text{ und } 4}}$ die Eigenwerte von A.

Siehe nächstes Blatt!

Bestimmung des Eigenraums zum Eigenwert 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}}$$

Bestimmung des Eigenraums zum Eigenwert 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}}$$

Gemäss dieser Berechnung der Eigenvektoren gilt $D = T^{-1}AT$ für

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $\alpha = 5$: Eigenwerte 0, 4 und 6, Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_0 &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \\ E_4 &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\ E_6 &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \neq 0,$$

daher steht E_2 nicht orthogonal auf E_4. Daher gibt es keine orthogonale Eigenbasis von A, d.h. T kann <u>nicht</u> orthogonal gewählt werden.

Bitte wenden!

3. **a)** Sei

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = \lambda_1 x^3 + \lambda_2(x^2 + x^3) + \lambda_3(x^3 - x^2 + 2) = 0$$

für $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^3 + (\lambda_2 - \lambda_3)x^2 + 2\lambda_3 = 0,$$

mit Koeffizientenvergleich also

$$\begin{aligned} 2\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung impliziert $\lambda_3 = 0$, die zweite $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und die dritte $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 = 0$. Darum sind p_1, p_2, p_3 linear unabhängig.

Variante: Zeigen, dass die Koordinaten von p_1, p_2, p_3 bezüglich der Basis 1, x, x^2, x^3 linear unabhängig sind (Rangbestimmung mit Gauss-Algorithmus).

b) Wegen

$$\langle p_1,\ p_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^6\,dx = \frac{1}{7}$$

ist der erste Basisvektor durch

$$\underline{\underline{b_1 =}}\frac{p_1}{\sqrt{\langle p_1,\ p_1\rangle}} = \underline{\underline{\sqrt{7}x^3}}$$

gegeben.

Zweiter Basisvektor:

$$\langle p_2, b_1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2 + x^3)\sqrt{7}x^3\,dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_{-1}^{1}(x^5 + x^6)\,dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$c_2 = p_2 - \langle p_2, b_1\rangle b_1 = x^2 + x^3 - x^3 = x^2$$

$$\langle c_2, c_2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{5}$$

$$\underline{\underline{b_2 =}}\frac{c_2}{\sqrt{\langle c_2,\ c_2\rangle}} = \underline{\underline{\sqrt{5}x^2}}$$

Dritter Basisvektor:

$$\langle p_3, b_1\rangle = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_{-1}^{1}(x^3 - x^2 + 2)x^3\,dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\langle p_3, b_2\rangle = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_{-1}^{1}(x^3 - x^2 + 2)x^2\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5} + \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$c_3 = p_3 - \langle p_3, b_1\rangle b_1 - \langle p_3, b_2\rangle b_2 = (x^3 - x^2 + 2) - x^3 - (-x^2 + \frac{10}{3}x^2) = 2 - \frac{10}{3}x^2$$

$$\langle c_3, c_3\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(4 - \frac{40}{3}x^2 + \frac{100}{9}x^4)\,dx = 4 - \frac{40}{9} + \frac{20}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\underline{\underline{b_3 =}}\frac{c_3}{\sqrt{\langle c_3,\ c_3\rangle}} = \underline{\underline{\frac{3}{2} - \frac{5}{2}x^2}}$$

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Bestimmung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \det\begin{pmatrix}5-\lambda & -18\\ 3 & -10-\lambda\end{pmatrix} = (5-\lambda)(-10-\lambda)+54\\ &= \lambda^2+5\lambda+4 = (\lambda+1)(\lambda+4) \overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

Die Matrix A hat also die Eigenwerte -1 und -4. Zugehörige Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Somit gilt $T^{-1}AT = D$ für

$$T = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

und nach der Variablentransformation $y(t) = Tz(t)$ ist das System von der Form $\ddot{z} = Dz$, es gilt also $\ddot{z}_1 = -z_1$ und $\ddot{z}_2 = -4z_2$. Dieses (entkoppelte) System hat die allgemeine Lösung

$$z(t) = \begin{pmatrix}a_1\sin t + a_2\cos t\\ b_1\sin(2t)+b_2\cos(2t)\end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\underline{\underline{y(t)}} = Tz(t) = \underline{\underline{(a_1\sin t + a_2\cos t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + (b_1\sin(2t)+b_2\cos(2t))\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}}$$

des ursprünglichen Systems.

b) Die Anfangsbedingungen $y(0) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ eingesetzt in die allgemeine Lösung liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned}3a_2+2b_2 &= 0,\\ a_2+b_2 &= 2,\end{aligned}$$

die $a_2 = -4$ und $b_2 = 6$ implizieren. Die allgemeine Lösung abgeleitet ist gleich

$$y'(t) = (a_1\cos t - a_2\sin t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + (2b_1\cos(2t) - 2b_2\sin(2t))\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Darum liefern die Anfangbedingungen $y'(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}3a_1+4b_1 &= 1,\\ a_1+2b_1 &= 0,\end{aligned}$$

die $a_1 = 1$ und $b_1 = -\frac{1}{2}$ implizieren. Somit lautet die gesuchte spezielle Lösung

$$\underline{\underline{y(t) = (\sin t - 4\cos t)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}\sin(2t) + 6\cos(2t))\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}}.$$

Bitte wenden!

5. **a)** $\mathcal{F}_1$ ist <u>nicht linear</u>, weil 0 unter $\mathcal{F}_1$ auf $1 \neq 0$ abgebildet wird (darum gilt $\mathcal{F}_1(0+0) \neq \mathcal{F}_1(0) + \mathcal{F}_1(0)$).

b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(p(x)+q(x)) &= x \cdot (p+q)'(x) + (p+q)(1) = x \cdot (p'(x) + q'(x)) + p(1) + q(1) \\ &= x \cdot p'(x) + p(1) + x \cdot q'(x) + q(1) = \mathcal{F}_2(p(x)) + \mathcal{F}_2(q(x))\end{aligned}$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_2(\lambda p(x)) = x \cdot (\lambda p)'(x) + (\lambda p)(1) = \lambda(xp'(x) + p(1)) = \lambda \mathcal{F}_2(p(x)).$$

Darum ist $\mathcal{F}_2$ <u>linear</u>.

Für die Bestimmung der Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ beachte man, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(1) &= 1 \\ \mathcal{F}_2(x) &= x+1 \\ \mathcal{F}_2(x^2) &= 2x^2+1 \\ \mathcal{F}_2(x^3) &= 3x^3+1\end{aligned}$$

gilt. Daher lautet die gesuchte Darstellungsmatrix

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

c) Es gilt

$$\mathcal{F}_3(A+B) = (A+B) + (A+B)^\top = A + A^\top + B + B^\top = \mathcal{F}_3(A) + \mathcal{F}_3(B)$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_3(\lambda A) = (\lambda A)^\top = \lambda A^\top = \lambda \mathcal{F}_3(A).$$

Darum ist $\mathcal{F}_3$ <u>linear</u>.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_3\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \\ \mathcal{F}_3\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \\ \mathcal{F}_3\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \\ \mathcal{F}_3\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) &= \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right),\end{aligned}$$

darum ist die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}_3$ bezüglich der gegebenen Basis gleich

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}.$$