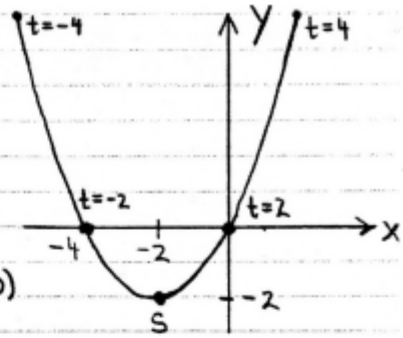


① (a) $\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t-2\\0.5t^2-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow t_0=2$, in $y(t)$: $y_0 = 0.5\cdot 4-2 = 0 \rightsquigarrow (0,0)$

$\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \overset{\text{soll}}{=} \begin{pmatrix}t-2\\0.5t^2-2\end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $0.5t^2=2$, $t^2=4$, $t_1=2$, $t_2=-2$ in $x(t)$: $x_1 = 2-2=0 \rightsquigarrow (0,0)$, $x_2=-2-2=-4 \rightsquigarrow (-4,0)$

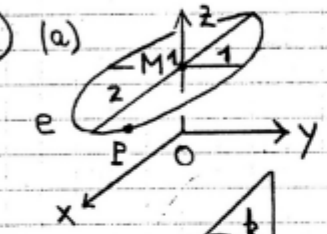
(b) $y(t) = \underbrace{0.5t^2}_{\geq 0} - 2 \geq -2$ und $=-2$ nur für $t=0$, in $x(t)$: $x_S=-2$, $y(t)$: $y_S=-2$ $\rightsquigarrow S=(-2,-2)$

(c) $x(t) = t-2 \rightsquigarrow t = x+2$ in $y(t) = 0.5t^2-2 = 0.5(x+2)^2-2 = 0.5(x^2+4x+4)-2$

$y = 0.5x^2+2x$ (Parabel mit Scheitel S)

---

② (a)

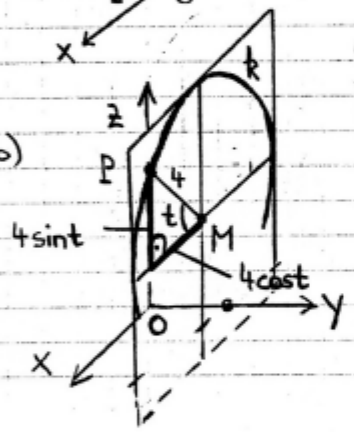


Ellipse bez M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}a\cos t\\b\sin t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix}$

bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$

$e: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}2\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$

(b)



Kreis bez M: $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}4\cos t\\0\\4\sin t\end{pmatrix}$, bez O: $\vec{r} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\cos t\\0\\4\sin t\end{pmatrix}$

$k: [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}4\cos t+1\\2\\4\sin t+3\end{pmatrix}$

Zur Erinnerung die Regeln:

① $(x^n)' = nx^{n-1}$, speziell: $(x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$, $(\text{Zahl})' = 0$

② $(f+g)' = f'+g'$ ③ $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$

④ Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{innere Abl}}$

⑤ Produktregel $(f\cdot g)' = f'g + fg'$

③ (a) $x'(t) = (4t)' \overset{①}{=} 4\cdot 1 = \underline{\underline{4}}$

(b) $y'(t) = (1+3t)' \overset{②}{=} (1)' + (3t)' \overset{①}{=} 0 + 3\cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

(c) $x'(t) = \Big(\underbrace{R}\underbrace{\sin}_{f}\big(\underbrace{\tfrac{2\pi}{60s}t}_{g}\big)\Big)' \overset{③}{\underset{④}{=}} \underbrace{R\cos\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)}_{f'}\cdot\underbrace{\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)'}_{\text{innere Abl}} \overset{①}{=} R\cos\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)\cdot\underbrace{\tfrac{2\pi}{60s}}_{g'} = \underline{\underline{\tfrac{2\pi R}{60s}\cos\left(\tfrac{2\pi}{60s}t\right)}}$

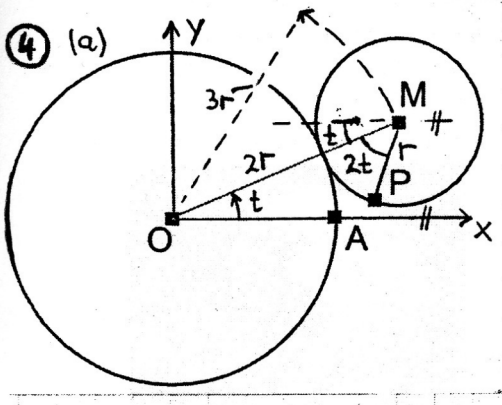
(d) $y'(t) = (\underbrace{at\sin t}_{f\cdot g})' \overset{⑤}{=} a\big[\underbrace{(t)'\sin t}_{f'\cdot g} + \underbrace{t\cdot(\sin t)'}_{f\cdot g'}\big] \overset{①}{\underset{③}{=}} a[1\cdot\sin t + t\cos t] = \underline{\underline{a\sin t + at\cos t}}$

(e) $x'(t) = (tR\cos\varphi)' = R\cos\varphi\cdot(t)' = \underline{\underline{R\cos\varphi}}$ (f) $x'(\varphi) = (tR\cos\varphi)' = tR(\cos\varphi)' \overset{③}{=} \underline{\underline{-tR\sin\varphi}}$

(g) $z'(t) = \left(\tfrac{h}{2\pi}\varphi\right)' = \tfrac{h}{2\pi}\varphi\cdot\underbrace{(1)'}_{=0} \overset{①}{=} \underline{\underline{0}}$ (h) $z'(\varphi) = \left(\tfrac{h}{2\pi}\varphi\right)' = \tfrac{h}{2\pi}(\varphi)' \overset{①}{=} \tfrac{h}{2\pi}\cdot 1 = \underline{\underline{\tfrac{h}{2\pi}}}$

(i) $x'(\varphi) = [e^\varphi\cos\varphi]' \overset{⑤}{=} (e^\varphi)'\cos\varphi + e^\varphi(\cos\varphi)' \overset{③}{=} e^\varphi\cos\varphi + e^\varphi(-\sin\varphi) = \underline{\underline{e^\varphi\cos\varphi - e^\varphi\sin\varphi}}$

④ (a)



Parameter $t \hat{=}$ Drehwinkel von M bez O

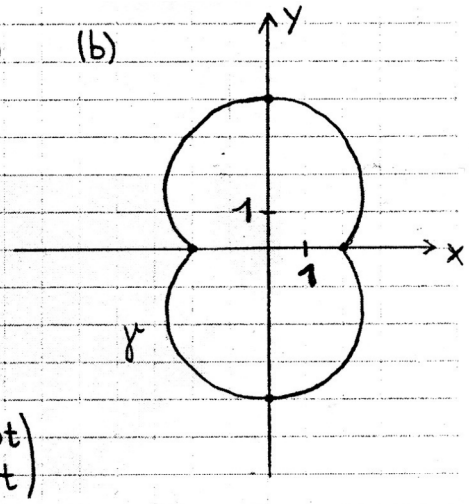
$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3r\cos t \\ 3r\sin t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 2\pi$

Abrollbedingung: gleiche Längen entsprechender Bogenstücke

$t \cdot 2r \overset{\text{soll}}{=} p \cdot r \rightsquigarrow p = 2t$

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -r\cos(3t) \\ -r\sin(3t) \end{pmatrix}$

(b)



$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3r\cos t - r\cos 3t \\ 3r\sin t - r\sin 3t \end{pmatrix}$

---

⑤ Wahl des KS: z-Achse $\hat{=}$ Turmachse, Anfangspunkt (0,R,0), Endpunkt (0,0,H)

(a) Grundriss: "Verjüngende" Spirale beginnend mit Radius $r = R$, Parameter $t \hat{=}$ Drehwinkel, in 6 Windungen ($\hat{=} 6 \cdot 2\pi$) Abnahme um R: $\frac{R}{12\pi}$ Radiusdifferenz pro Winkeleinheit

(Drehung im Uhrzeigersinn: Vertauschen von cos und sin, Start in (0,R,0))

$$x(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi} t\right)}_{\text{Radius}} \sin t, \quad y(t) = \underbrace{\left(R - \frac{R}{12\pi} t\right)}_{\text{Radius}} \cos t \quad (0 \le t \le 6 \cdot 2\pi)$$

Höhe: In 6 Windungen ($\hat{=} 6 \cdot 2\pi$) Höhe H $\rightsquigarrow \frac{H}{12\pi}$ Höhendifferenz pro Winkeleinheit

$$z(t) = \frac{H}{12\pi} t$$

$$\gamma: [0, 12\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; t \longmapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{12\pi} t\right)\sin t \\ \left(R - \frac{R}{12\pi} t\right)\cos t \\ H/12\pi \cdot t \end{pmatrix}$$

(b) $z(t) = \frac{H}{12\pi} t \rightsquigarrow t = \frac{12\pi}{H} z$

$$\gamma: [0, H] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; z \longmapsto \vec{r}(z) = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{R}{H} z\right) \sin\left(\frac{12\pi}{H} z\right) \\ \left(R - \frac{R}{H} z\right) \cos\left(\frac{12\pi}{H} z\right) \\ z \end{pmatrix}$$

⑥ (a) Sei P ein beliebiger Punkt der Schnittkurve. Die (vertikale) Mantellinie auf dem Zylinder durch P schneidet die Berührkreise k_1 und k_2 in den Punkten B_1 und B_2. Sie ist Tangente beider Kugeln. PF_1 und PB_1 sind Tangentenabschnitte von P an die obere Kugel und sind deshalb gleich lang: $|PF_1| = |PB_1|$ ①

Analog gilt für die Tangentenabschnitte: $|PF_2| = |PB_2|$ ②

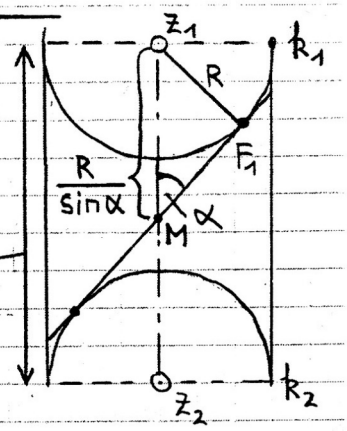
$|PF_1| + |PF_2| \overset{①,②}{=} |PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2| = \text{konst.}$

Alle Punkte P der Schnittkurve haben die konstante Entfernungssumme $|B_1B_2|$ zu F_1, F_2 $\rightsquigarrow$ Ellipse!

*

$\sin\alpha = \frac{R}{|Z_1M|}$

$|Z_1M| = \frac{R}{\sin\alpha}$



(b) Kl. Halbachse $b = R$ (Zylinderradius), Figur *

gr. Halbachse $a \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}|B_1B_2| \overset{*}{=} |Z_1M| \overset{\downarrow}{=} \frac{R}{\sin\alpha}$