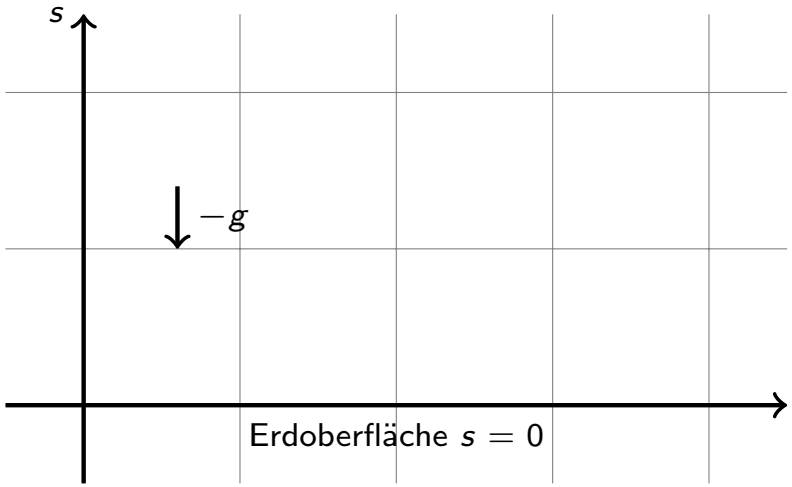
Mathematik II
Frühlingsemester 2015
Kapitel 11: Gewöhnliche Differentialgleichungen

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2015/other/mathematik2_biol

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/~farkas

1. Differentialgleichungen 1. Ordnung
2. Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung
3. Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung

Ein einführendes Beispiel



Zum Freien Fall im luftleeren Raum

Wir betrachten einen im luftleeren Raum *frei* fallenden Körper.
Wir erinnern an den folgenden Zusammenhang zwischen

- der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$
- der Geschwindigkeit $v = v(t)$
- der Beschleunigung $a = a(t)$

einer Bewegung:

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad \text{und} \quad a = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Für den *freien Fall* gilt somit:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

Ein einführendes Beispiel

- Der 1. Integrationsschritt führt zunächst zur *Geschwindigkeits-Zeit-Funktion*

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (-g)dt = -gt + C_1$$

- Durch *nochmalige Integration* folgt hieraus die gesuchte *Weg-Zeit-Funktion*

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-gt + C_1)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

- Für $t = 0$:

$$\begin{cases} s(0) = C_2: & \textit{Wegmarke (Höhe)} \text{ zu Beginn} \\ v(0) = C_1: & \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{cases}$$

  Üblicherweise schreibt man dafür:

$$s(0) = s_0 \quad \text{und} \quad v(0) = v_0$$

- Wir erhalten:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Definition

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten, heisst eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung*.

Anmerkung

- Sie ist daher in der *impliziten* Form

$$F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0$$

oder, falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ auflösbar ist, in der *expliziten* Form

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; ...; y^{(n-1)})$$

darstellbar.

Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Beispiele

$y' = 2x$	Explizite Dgl 1. Ordnung
$x + yy' = 0$	Implizite Dgl 1. Ordnung
$y' + yy'' = 0$	Implizite Dgl 2. Ordnung
$\ddot{s} = -g$	Explizite Dgl 2. Ordnung
$y''' + 2y'' = cos(x)$	Implizite Dgl 3. Ordnung
$y^{(6)} - y^{(4)} + y'' = e^x$	Implizite Dgl 6. Ordnung

Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Definition

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

Wir unterscheiden dabei noch zwischen der *allgemeinen* Lösung und der *speziellen oder partikulären* Lösung:

- Die *allgemeine* Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält noch n voneinander unabhängige *Parameter* (Integrationskonstanten).
- Eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund *zusätzlicher* Bedingungen den n Parametern *feste* Werte zuweist.
  Dies kann beispielsweise durch *Anfangsbedingungen* oder durch *Randbedingungen* geschehen.

Beispiele

- Die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2x$$

erhalten wir durch *unbestimmte Integration:*

$$y = \int y' \cdot dx = \int 2x \cdot dx = x^2 + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

- Die *harmonische Schwingung* eines elastischen Federpendels lässt sich bekanntlich durch eine Sinusfunktion vom Typ

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$$

beschreiben.
Wir differenzieren die Funktion $x(t)$ *zweimal* nach der Zeit und erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \ddot{x} &= -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \\ &= -\omega_0^2 x \end{aligned}$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Bei einem *Anfangswertproblem*, auch *Anfangswertaufgabe* genannt, werden der Lösungsfunktion $y = y(x)$ insgesamt n Werte, nämlich der *Funktionswert* sowie die Werte der $n-1$ ersten *Ableitungen* an einer Stelle x_0, vorgeschrieben: $y(x_0)$, $y'(x_0)$,..., $y^{(n-1)}(x_0)$.
- Wir bezeichnen sie als *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen*.
- Sie führen zu n *Bestimmungsgleichungen* für die Parameter $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Anfangswert- und Randwertprobleme

Dgl 1. Ordnung: Gesucht ist diejenige *spezielle* Lösungskurve der Differentialgleichung, die durch den vorgegebenen *Punkt* $P = (x_0, y_0)$ verläuft.

Dgl 2. Ordnung: Gesucht ist diejenige *spezielle* Lösungskurve der Differentialgleichung, die durch den vorgegebenen *Punkt* $P = (x_0, y_0)$ verläuft und dort die vorgegebene *Steigung* $y'(x_0) = m$ besitzt.

Anfangswert- und Randwertprobleme

Beispiel

- Wir lösen die *Anfangswertaufgabe*

$$y' = 2x, \quad y(0) = 1:$$

Allgemeine Lösung:	$y = \int y' dx = \int 2x \; dx = x^2 + C$
Bestimmung des Parameters:	$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$
Gesuchte spezielle Lösung:	$y(x) = x^2 + 1$

- Das *Anfangswertproblem*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \qquad (x_0 > 0, \, \omega_0 \neq 0)$$

beschreibt die *hamonische Schwingung* eines elastischen *Federpendels*. Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (A > 0; 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Die Parameter A und ϕ bestimmen wir aus den beiden *Anfangswerten* wie folgt:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 \quad &\Rightarrow \quad A \cdot \sin(\phi) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_0 A \cos(\phi) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \phi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

Wegen $A > 0$ und $x_0 > 0$ ist auch $\sin(\phi) > 0$.
Der gesuchte Phasenwinkel liegt daher im Intervall $0 < \phi < \pi$.
Es kommt somit nür die Lösung $\phi = \pi/2$ in Frage.
Dann folgt $A = x_0$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \\ &= x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Bei einem *Randwertproblem*, auch *Randwertaufgabe* genannt, werden der gesuchten *speziellen* Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung an n verschiedenen Stellen x_1, x_2, ...,x_n der Reihe nach die Funktionswerte $y(x_1)$, $y(x_2)$,..., $y(x_n)$ vorgeschrieben.
- Sie werden als *Randwerte* oder *Randbedingungen* bezeichnet und führen wiederum zu n *Bestimmungsgleichungen* für die n Parameter C_1, C_2, ...,C_n der allgemeinen Lösung.
- Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung bedeutet dies: die Lösungskurve ist so zu bestimmen, dass sie durch *zwei* vorgegebene Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$ verläuft.
- Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass nicht *jedes* Randwertproblem lösbar ist.
- In bestimmten Fällen können auch *mehrere* Lösungen auftreten.

Anfangswert- und Randwertprobleme

Beispiel

- Wir betrachten einen auf zwei Stützen ruhenden und durch eine *konstante* Streckenlast q gleichmässig belasteten *Balken*. In der Festigkeitslehre wird gezeigt, dass die *Biegelinie* $y = y(x)$ für *kleine* Durchbiegungen näherungsweise der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = -\frac{M_b}{EI}$$

genügt. Darin bedeuten:

E: *Elastizitätmodul* (Material Konstante)
I: *Flächenmoment* des Balkenquerschnitts
M_b: *Biegemoment*

Für das Biegemoment M_b erhalten wir in diesem Belastungsfall

$$M_b = \frac{q}{2}(lx - x^2) \quad (0 \leq x \leq l)$$

An den beiden Enden ist die Durchbiegung jeweils *Null*.

Wir erhalten somit die *Randwertaufgabe*

$$y'' = -\frac{q}{2EI}(lx - x^2) \quad y(0) = y(l) = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \text{ zu lösen.}$$

Anfangswert- und Randwertprobleme

- Wir bestimmen die *allgemeine Lösung*:

$$y(x) = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{1}{6}lx^3 - \frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2\right)$$

- Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 berechnen wir aus den *Randbedingungen* wie folgt:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = 0 \\ y(l) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{12}l^3 \end{aligned}$$

- Die *Biegelinie* lautet somit:

$$y(x) = \frac{q}{24EI}\left(-2lx^3 + x^4 + l^3x\right)$$

Geometrische Betrachtungen

Die Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ besitze die Eigenschaft, dass durch *jeden* Punkt des Definitionsbereiches von $f(x; y)$ *genau* eine Lösungskurve verlaufe. $P_0 = (x_0; y_0)$ sei ein solcher Punkt und $y = y(x)$ die durch P_0 gehende *Lösungskurve*.
Die Steigung m der Kurventangente in P_0 kann dann auf *zwei* verschiedene Arten berechnet werden:

- Aus der (als bekannt vorausgesetzten) *Funktionsgleichung* $y = y(x)$ der Lösungskurve durch Differentiation nach der Variablen x: $m = y'(x_0)$;
- Aus der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ selbst, indem man in diese Gleichung die Koordinaten des Punktes P_0 einsetzt: $m = f(x_0; y_0)$.

Es gilt somit

$$m = y'(x_0) = f(x_0; y_0)$$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$y' = f(x) \cdot g(y)$ oder $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ heisst separabel und lässt sich

durch *"Trennung der Variablen"* lösen: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

"Trennung der Variablen"

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. *Trennung* der beiden Variablen.
2. Integration auf *beiden* Seiten der Gleichung.
3. Auflösung der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen y (falls überhaupt möglich).

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Beispiel

- Die *Anfangswertaufgabe*

$$x + yy' = 0, \quad y(0) = 2$$

lösen wir durch *Trennung der Variablen*.

- *Trennung der Variablen:*

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y\ dy = -x\ dx$$

- *Integration:*

$$\int y\ dy = -\int x\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

- *Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:*

$$y^2 = 2C - x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2C$$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

- Dies ist die Gleichung eines *Mittelpunktkreises* mit dem Radius $R = \sqrt{2C}$, falls $C > 0$ ist.

  Für $C = 0$ erhalten wir den *Nullpunkt*, für $C < 0$ existieren *keine* Lösungen.
- *Spezielle Lösung für* $y(0) = 2$

$$\begin{aligned} y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad C = 2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{(Substitution: } u = ax + by + c \text{)}$$

und

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \text{(Substitution: } u = \frac{y}{x} \text{)}$$

lassen sich mittels der jeweils in Klammern angegebenen *Substitution* schrittweise wie folgt lösen:

1. Durchführung der *Substitution*.
2. *Integration* der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion u durch *Trennung der Variablen*.
3. *Rücksubstitution* und *Auflösen* der Gleichung nach y.

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Beispiel

- Die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ und lässt sich daher durch die *Substitution* $u = \frac{y}{x}$ wie folgt lösen:

- *Substitution*:

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{d.h.} \quad y = xu, \qquad y' = u + xu'$$

$$y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = 1 + 2u \quad \text{oder} \quad xu' = 1 + u$$

Integration spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

- *Integration durch Trennung der Variablen:*

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} = 1 + u \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C| \\ &\Rightarrow \quad |u+1| = |Cx| \end{aligned}$$

- *Rücksubstitution:*

$$y = xu = x(Cx - 1) = Cx^2 - x$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{x+2y}{x}$ besitzt somit die Gestalt

$$y = Cx^2 - x \quad (C \in \mathbb{R})$$

Definition einer linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

Anmerkung

- Die Funktion $g(x)$ wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. *Fehlt* das *Störglied*, d.h. ist $g = 0$, so heisst die lineare Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Definition: lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Beispiel

- Die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung sind *linear*:

$y' - xy = 0$	Homogene Dgl
$xy' + 2y = e^x$	Inhomogene Dgl
$y' + tan(x) \cdot y = 2sin(2x)$	Inhomogene Dgl

- *Nicht-linear* sind folgende Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$y' = 1 - y^2$	(y tritt in der 2. Potenz auf)
$yy' + x = 0$	(Die Differentialgleichung enthält ein Produkt yy')

Integration der homogenen linearen Differentialgleichung

Integration der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine *homogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst.
Die *allgemeine* Lösung ist dann in der Form

$$y = C \cdot \exp\left(-\int f(x)dx\right) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

darstellbar.

Beispiele

- $y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \, (x \neq 0)$ lässt sich lösen:

$$y = C \cdot \exp\left(\int \frac{-1}{x^2} \, dx\right) = C \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $y' - 2xy = 0, \quad y(0) = 5$ lässt sich lösen:

$$\begin{aligned} y &= C \cdot \exp\left(\int 2x \, dx\right) \\ &= C \cdot \exp\left(x^2\right) \\ &= 5 \cdot \exp\left(x^2\right) \quad \textit{mit} \quad y(0) = 5 \end{aligned}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung durch "Variation der Konstanten"

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich durch " Variation der Konstanten" schrittweise wie folgt lösen:

- *Integration* der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung $y' + f(x) \cdot y = 0$ durch *Trennung der Variablen:*

$$y_0 = K \cdot \exp(-\int f(x)dx)$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung durch "Variation der Konstanten"

- *Variation der Konstanten:* die Integrationskonstante K wird durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt. Mit dem Lösungsansatz

$$y = K(x) \cdot \exp(-\int f(x)dx)$$

geht man dann in die *inhomogene* lineare Differentialgleichung ein und erhält eine einfache Differentialgleichung 1. Ordnung für die Faktorfunktion $K(x)$, die durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden kann.

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Beispiele

- $$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

  Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Differentialgleichung durch *Trennung der Variablen*.

  Die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung lautet somit:

$$\begin{aligned} y &= K \exp(-\int \frac{1}{x} dx) \\ &= \frac{K}{x} \quad (K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch *Variation der Konstanten* ($K \to K(x)$)

$$y = \frac{K(x)}{x}, \quad y' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} \\ &= \frac{K'(x)}{x} \end{aligned}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\frac{K'(x)}{x} = \cos(x)$$

Durch *unbestimmte Integration* folgt hieraus:

$$K(x) = \int x \cdot \cos(x)\ dx = \cos(x) + x\sin(x) + C$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung besitzt damit die *allgemeine* Lösung

$$y(x) = \frac{\cos(x) + x\sin(x) + C}{x}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Beispiel

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}$$

Die zugehörige *homogene* Differentialgleichung

$$y' - 3y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst.
Ihre *allgemeine* Lösung ist

$$y_0(x) = K \cdot e^{3x} \quad (K \in \mathbb{R})$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch den Ansatz

$$y = K(x) \cdot e^{3x}$$

Integration einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Wir fügen die Terme

$$y = K(x) \cdot e^{3x}, \quad y'(x) = K'(x)e^{3x} + 3 \cdot K(x)e^{3x}$$

in die *inhomogene* Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= K'(x)e^{3x} + 3K(x)e^{3x} - 3K(x)e^{3x} = x \cdot e^{4x} \\ K'(x)e^{3x} &= x \cdot e^{4x} \quad \text{oder} \quad K'(x) = x \cdot e^{x} \end{aligned}$$

- Durch *unbestimmte Integration* folgt:

$$K(x) = (x-1) \cdot e^{x} + C$$

- Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet damit:

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot e^{3x} \\ &= [(x-1) \cdot e^{x} + C] \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist als *Summe* aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- **Homogene lineare Differentialgleichung** $y' + ay = 0$ $(a \neq 0)$
  Die *homogene* lineare Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung
  $$y_0 = C \cdot e^{-ax} \quad (C \in \mathbb{R})$$
- **Inhomogene lineare Differentialgleichung** $y' + ay = g(x)$ $(a \neq 0)$
  Die *inhomogene* Differentialgleichung wird entweder durch *Variation der Konstanten* oder durch *Aufsuchen einer partikulären Lösung* gelöst.

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$
Polynom vom Grade n	Polynomfunktion vom Grade n $y_p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ *Parameter:* $c_0, c_1 \ldots, c_n$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p(x) = C \cdot \sin(\omega x + \phi)$ Parameter: C_1, C_2 bzw. C, ϕ
$g(x) = A \cdot \exp(bx)$	$y_p(x) = \begin{cases} C \cdot \exp(bx) & b \neq -a \\ Cx \cdot \exp(bx) & b = -a \end{cases}$ für Parameter: C

Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel

- $$y' + 5y = -26 \cdot \sin(x), \quad y(0) = 0$$

  Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + 5y = 0$:

  $$y_0 = C \cdot e^{-5x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

  Eine partikuläre Lösung für die *inhomogene* Differentialgleichung ist

  $$y_p = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x)$$

  Bestimmung der *Parameter* C_1 und C_2:

  $$\begin{aligned} y_p' &= C_1 \cdot \cos(x) - C_2 \cdot \sin(x) \\ y_p' + 5y_p &= -26 \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

- Ordnen der Glieder:

$$(5C_1 - C_2) \cdot \sin(x) + (C_1 + 5C_2) \cdot \cos(x) = -26 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)$$

Koeffizientenvergleich führt zu dem *linearen Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 5C_1 - C_2 &= -26 \\ C_1 + 5C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt dann

$$\begin{aligned} C_2 &= 1 \\ C_1 &= -5 \end{aligned}$$

Die *partikuläre* Lösung ist damit eindeutig bestimmt:

$$y_p(x) = -5 \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

- Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet somit:

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-5x} - 5 \cdot \sin(x) + \cos(x) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Den Parameter C berechnen wir wie folgt aus dem *Anfangswert* $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow C = -1$$

Die *Anfangswertaufgabe* besitzt demnach die *Lösung*

$$y = y_0 + y_p = -e^{-5x} - 5 \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

heisst *lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* $(a, b \in \mathbb{R})$.

Anmerkungen

- Kennzeichen einer *linearen* Differentialgleichung 2. Ordnung sind:
  - y, y' und y'' treten *linear*, d.h. in der *1. Potenz* auf.
  - "Gemischte Produkte" wie yy',yy'' und $y'y''$ sind in der Differentialgleichung *nicht* enthalten.

Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiele

- Die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung sind *linear* und besitzen *konstante* Koeffizienten:

$y + y'' = 0$	Homogene Dgl
$y'' + 2y' - 3y = 2x - 4$	Inhomogene Dgl
$2y'' - 4y' + 20y = \cos(x)$	Inhomogene Dgl

- Die Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y'' + xy' + y = 0 \quad \text{und} \quad x^3y'' + x^2y' - xy = e^x$$

sind zwar *linear*, besitzen jedoch *nicht-konstante* Koeffizienten.

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine *homogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

besitzt folgende Eigenschaften:

- Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist auch die mit einer *beliebigen* Konstanten C multiplizierte Funktion

  $$y(x) = C \cdot y_1(x)$$

  eine Lösung der Differentialgleichung ($C \in \mathbb{R}$).

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei *Lösungen* der Differentialgleichung, so ist auch die aus ihnen gebildete *Linearkombination*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

  eine Lösung der Differentialgleichung ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)
- Ist $y(x) = u(x) + j \cdot v(x)$ eine *komplexwertige Lösung* der Differentialgleichung, so sind auch *Realteil* $u(x)$ und *Imaginärteil* $v(x)$ *Lösungen* der Gleichung.

Allgemeine Eigenschaften der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

Beispiel

- Gegeben ist die sog. *Schwingungsgleichung*

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Partikuläre Lösungen sind u.a:

$$y_1 = \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2 = \cos(\omega x)$$

Für $y_1 = \sin(\omega x)$:

$$y_1'' = (\omega \cdot \cos(\omega x))' = -\omega^2 \cdot \sin(\omega x) \quad \Rightarrow \quad y_1'' + \omega^2 \cdot y_1 = 0$$

Damit sind auch die folgenden Funktionen *Lösungen* der Schwingungsgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Definition

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

werden als *Basisfunktionen* oder *Basislösungen* der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die mit ihnen gebildete sog. *Wronski-Determinante*

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Anmerkung

- Zwei *Basislösungen* $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der *homogenen Differentialgleichung* werden auch als *linear unabhängige* Lösungen bezeichnet, d.h.

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

ist als *Linearkombination* zweier *linear unabhängiger* Lösungen (*Basislösungen*) $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ in der Form

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

darstellbar ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Beispiel

- Die *Schwingungsgleichung* $y'' + \omega^2 y = 0$ hat u.a. die Lösungen

$$y_1(x) = \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \cos(\omega x)$$

Sie bilden eine *Fundamentalbasis* der Differentialgleichung, da ihre Wronski-Determinante einen *von Null verschiedenen* Wert besitzt:

$$\begin{aligned} W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\omega \sin(x) & \omega \cos(\omega x) \end{vmatrix} \\ &= \omega \cdot \cos^2(\omega x) + \omega \cdot \sin^2(\omega x) \\ &= \omega \end{aligned}$$

Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

- Die *allgemeine* Lösung der *Schwingungsgleichung* $y'' + \omega^2 y = 0$ ist daher darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \\ &= C_1 \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot \sin(\omega x) \end{aligned}$$

- Die *homogene* Differentialgleichung $y'' - 4y' - 5y = 0$ besitzt u.a. die Lösungen

$$y_1(x) = e^{5x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Sie bilden eine *Fundamentalbasis* der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 5e^{5x} & -e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= -6e^{4x} \end{aligned}$$

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Mit dem Lösungansatz $y = e^{\lambda x}$ lässt sich eine *Fundamentalbasis* y_1, y_2 der *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

gewinnen.
Die *Basislösungen* hängen dabei noch von der *Art* der Lösungen λ_1, λ_2 der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ab, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$):

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- **Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)**
  Fundamentalbasis: $y_1 = \exp(\lambda_1 x), \quad y_2 = \exp(\lambda_2 x)$
  Allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 x) + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 x)$
- **Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell)**
  Fundamentalbasis: $y_1 = \exp(cx), \quad y_2 = x \cdot \exp(cx)$
  Allgemeine Lösung: $y = C_1 \cdot \exp(cx) + C_2 \cdot x \cdot \exp(cx)$
- **Fall $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)**

  Fundamentalbasis: $y_1 = \exp(\alpha x) \cdot \sin(\omega x), \quad y_2 = \exp(\alpha x) \cdot \cos(\omega x)$
  Allgemeine Lösung: $y = \exp(\alpha x)\,[C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)]$

Beweis:

- Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit

$$y = e^{\lambda x}, \;\; y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \;\; y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

gehen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten die folgende *quadratische* Bestimmungsgleichung für den Parameter λ:

$$\begin{gathered} y'' + ay' + by = \lambda^2 \exp(\lambda x) + a\lambda \cdot \exp(\lambda x) + b \cdot \exp(\lambda x) = 0 \\ (\lambda^2 + a\lambda + b) \cdot e^{\lambda x} = 0, \;\; \forall \exp(\lambda x) \\ (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \end{gathered}$$

Sie wird als *charakteristische Gleichung* der homogenen Gleichung $y'' + ay' + by = 0$ bezeichnet und besitzt die Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

ist als Summe aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Polynomfunktion vom Grade n $g(x) = \mathcal{P}_n(x)$	$y_p = \begin{cases} \mathcal{Q}_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot \mathcal{Q}_n(x) & \text{für } b = 0,\ a \neq 0 \\ x^2 \cdot \mathcal{Q}_n(x) & b = 0,\ a = 0 \end{cases}$ $\mathcal{Q}_n(x)$: Polynom vom Grade n *Parameter:* Koeffizienten des Polynoms $\mathcal{Q}_n(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$ *Parameter:* A	• c ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ • c ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ • c ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$	$j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$ *Parameter:* A, B oder C, ϕ

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
Sinusfunktion $g(x) = \sin(\beta x)$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos(\beta x)$ oder eine Linearkombination aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$	$j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x\,[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$ oder $y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \phi)$ *Parameter:* A, B oder C, ϕ

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ (P_n Polynomfunktion vom Grade n)	$c + j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = e^{cx}\left[\mathcal{Q}_n \cdot \sin(\beta x) + \mathcal{R}_n \cdot \cos(\beta x)\right]$ $\mathcal{Q}_n, \mathcal{R}_n$: Polynom vom Grade n *Parameter:* Koeffizienten der Polynome $\mathcal{Q}_n$ und $\mathcal{R}_n$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$ (P_n Polynomfunktion vom Grade n)	$c + j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x \cdot e^{cx} \left[\mathcal{Q}_n \cdot \sin(\beta x) + \mathcal{R}_n \cdot \cos(\beta x)\right]$ $\mathcal{Q}_n, \mathcal{R}_n$: Polynom vom Grade n *Parameter:* Koeffizienten der Polynome $\mathcal{Q}_n$ und $\mathcal{R}_n$