Prof. Dr. E. W. Farkas
ETH Zürich FS 2015

Koordinator
Wei Qian

Mathematik II BIOL-B, HST, PHAR

Lösung 8

Aufgabe 1

Die Gerade und die Parabel schneiden sich bei $x = -2$ und bei $x = 1$. Damit ist die gesuchte Fläche

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} -x + 2 - x^2 \, dx \\ &= \big[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \big]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Mit $r(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{3}}$ ist

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \int_0^{r(\varphi)} 1 \, r dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 |_0^{r(\varphi)} \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{\frac{2\varphi}{3}} \, d\varphi \\ &= \frac{3}{4} e^{\frac{2\varphi}{3}} |_0^{\pi} \\ &= \frac{3}{4} \big(e^{\frac{2\pi}{3}} - 1 \big) \approx 5.3404. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Das Volumen des Trichters ist

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(V) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{a}} 1 \, dz \, r dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a} (\sqrt{a} - \sqrt{r}) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \big[\frac{\sqrt{a}}{2} r^2 - \frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}} \big]_0^{a} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^{\frac{5}{2}}}{10} \, d\varphi \\ &= \frac{\pi a^{\frac{5}{2}}}{5}. \end{aligned}$$

(b) Die Schwerpunktkoordinate z_S bestimmt man aus der angegebenen Formel als

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{\mathrm{vol}(V)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{a}} z \, dz \, r dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(V)} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2}(a-r) r \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(V)} \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{6} \, d\varphi \\ &= \frac{5}{\pi a^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\pi a^3}{6} \\ &= \frac{5\sqrt{a}}{6}. \end{aligned}$$

Wegen der Rotationssymmetrie von V ist $x_S = y_S = 0$. Es folgt $S = \left(0, 0, \frac{5\sqrt{a}}{6}\right)$.