Lösungen 6

23. Bezeichne W den Ausartungsraum von Φ und seien $v, w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass dann auch $\lambda v + w \in W$, i.e. dass $\Phi(\lambda v + w, y) = 0$ für alle $y \in V$. Die Bilinearität gibt nun

$$\Phi(\lambda v + w, y) = \lambda\Phi(v, y) + \Phi(w, y) = \lambda 0 + 0 = 0.$$

24. Wir betrachten die Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(v) := \Psi(u, v)$. Wegen der Bilinearität von Ψ ist f linear. Nun ist

$$\{v \in V |\ \Psi(u, v) = 0\} = \text{Kern}(f)$$

und folglich ein Untervektorraum. Wir wenden die Dimensionsformel für Kern und Bild von linearen Abbildungen auf f an und bekommen

$$\dim(\text{Kern}(f)) = \dim(V) - \dim(\text{Bild}(f)) = n - 1.$$

Bei der letzten Gleichung haben wir verwendet, dass $f(u) = \Psi(u, u) \neq 0$ und also $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}$.

25. Wir betrachten

$$\varphi := \Psi^{-1}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom $P_\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Gemäss der Proposition in Abschnitt 9.11 aus Greubs linear algebra (siehe zum Beispiel die online-Version auf link.springer.com) sind Φ und Ψ als quadratische Funktionen genau dann simultan diagonalisierbar, wenn φ als lineare Abbildung zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte hat. Da P_φ aber keine reellen Nullstellen hat, ist φ nicht diagonalisierbar.

26. Wir betrachten

$$\varphi := \Psi^{-1}\Phi = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gerade die Eigenwerte von φ. Nun suchen wir eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ von V aus Eigenvektoren von φ. Bezüglich einer solchen Basis haben dann die quadratischen Funktionen Φ und Ψ Diagonalgestalt, wobei der i-te Diagonaleintrag gleich $v_i^t \Phi v_i$ beziehungsweise gleich $v_i^t \Psi v_i$ ist (dies ist beispielsweise ersichtlich aus dem Beweis der Proposition aus Abschnitt 9.11 in Greubs Buch). Wir rechnen und bekommen

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{beziehungsweise} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

als Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ_1, λ_2 beziehungsweise λ_3. Für die Matrix Ψ' von Ψ bezüglich $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ erhalten wir

$$\Psi' = \begin{pmatrix} v_1^t \Psi v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2^t \Psi v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^t \Psi v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix Φ' von Φ bezüglich $\mathcal{B}$ lässt sich analog berechnen, oder schneller durch die Gleichung

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Psi' = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}.$$