

Serie 22

SEPARABLE UND NORMALE KÖRPERERWEITERUNGEN

1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeige: Ist $[L/K]$ teilerfremd zu p , so ist L/K separabel.
2. Zeige: Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.
3. Zeige: Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ ist M/K genau dann separabel, wenn M/L und L/K separabel sind.
- *4. Betrachte eine algebraische Körpererweiterung L/K und setze

$$L' := \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}.$$

Zeige:

- (a) L' ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K , welcher separabel über K ist.
 - (b) Ist $L' \neq L$, so ist $p := \text{char}(K) > 0$ und für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geq 0$ mit $a^{p^r} \in L'$. (Man nennt L/L' dann *rein inseparabel*.)
 - (c) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist jede separable algebraische Körpererweiterung von L' trivial. (Man nennt L' dann *separabel abgeschlossen*.)
5. Ist für folgendes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ normal? Falls nicht, bestimme eine normale Hülle.
 - (a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$
 - (b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$
 - *6. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Körper der über \mathbb{Q} mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass L/\mathbb{Q} eine normale Erweiterung ist.