

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Name	
Vorname	
Leginummer	

1	2	3	4	5	Punkte	Note

Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt! Und gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer auf dieses Deckblatt ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie keinen Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

Beachten Sie während der Prüfung:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der Multiple Choice Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Glück!

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
\times	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, so streichen Sie es einfach irgendwie durch (bis es kein Kreuzchen mehr ist:-)

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls sie unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Die lineare Abbildung $(x, y) \mapsto (x + y, y - x)$ von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 wird, bzgl. der Standardbasis, durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dargestellt.		
b) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n(\det A)$ für alle $n \times n$ -Matrizen.		
c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ beschreibt eine 45° -Drehung der Ebene.		
d) Die Projektion auf die x - y -Ebene im \mathbb{R}^3 , also $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$, hat Determinante 0 , denn diese Abbildung ist sicher nicht invertierbar.		
e) Sei A eine lineare Abbildung und v ein Vektor. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$.		
f) $(0, 1, 2, 3, \dots, 100)$, $(0, 1, 4, 9, \dots, 100^2)$ und $(0, 1, 8, 27, \dots, 100^3)$ sind drei linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^{101}		
g) Das inhomogene (also $b \neq 0$) Gleichungssystem $Ax = b$ habe mindestens zwei linear unabhängige Lösungen. Dann ist der Kern der Matrix A mindestens 2-dimensional.		
h) Die Polynome $\{(x + 1)^2, 7x + 7, (x - 1)^2, 3x - 3\}$ in P_2 sind linear unabhängig.		
Die Polynome $\{(x + 1)^2, 7x + 7, (x - 1)^2, 3x - 3\}$ erzeugen P_2 .		
i) Die Polynome $\{(2x + 2)^2, 2x^2 + 2, (x - 1)(x + 1)\}$ im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 sind linear unabhängig.		
Die Polynome $\{(2x + 2)^2, 2x^2 + 2, (x - 1)(x + 1)\}$ erzeugen P_2 .		
j) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$; es gilt $\dim(\ker(A)) = \dim(\text{im}(A))$.		

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] $B = \{1, x, x^2\}$ ist eine Basis des Vektorraums P_2 aller Polynome vom Grad ≤ 2 .

a) Man beschreibe die lineare Abbildung

$$L : P_2 \rightarrow P_2, \quad p(x) \mapsto p(x) - xp'(x) + p''(x)$$

in der Basis B durch eine Matrix A .

b) Man bestimme eine Eigenbasis E von L und die zugehörige Darstellungsmatrix D .

c) Man bestimme den Lösungsraum U von $Lp(x) = x^2$ in P_2 .

3. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+2b & 2(a-2b) & a-2b \\ b & 2a & -b \\ -a & 2(a-2b) & 3a \end{pmatrix}$$

a) Der Vektor $(0, -1, 2)^\top$ ist ein Eigenvektor von A . Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

b) Für welche a, b ist A singulär? *Hinweis:* berechne $\det(A)$

c) Sei nun $a = 2b$; man bestimme Matrizen D und T so dass $D = T^{-1}AT$ diagonal ist.

4. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = 15x_1^2 - 20x_1x_2 + 15x_2^2 + x_3^2 \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.

b) Eine Quadrik Q ist gegeben durch $q(x) = 50$. Bringen Sie die Quadrik Q durch eine Hauptachsentransformation auf Normalform.

c) Ist die quadratische Form q positiv definit, negativ definit oder indefinit? Und welche Punkte x im \mathbb{R}^3 erfüllen die Gleichung $q(x) = 0$? Begründen Sie!

5. [10 Punkte] Gegeben sei die Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

im Vektorraum \mathbb{R}^3 .

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis B an, um eine Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten.

b) Sei $O = \{e_1, e_2, e_3\}$ die ONB aus Aufgabenteil a). Finden Sie die Transformationsmatrix welche Koordinaten bzgl. der Standardbasis von \mathbb{R}^3 in Koordinaten bzgl. der Basis O umwandelt.

c) Finden Sie eine Matrix A mit $\text{im}(A) = \text{span}\{e_3\}$ und $\ker(A) = \text{span}\{e_1, e_2\}$.