

ETHZ, D-MAVT  
**Basisprüfung Lineare Algebra**  
Frühling 2007  
Prof. K.Nipp

**Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Bestimmen Sie jeweils mit dem Gaussverfahren, ob die Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^4$  linear abhängig oder linear unabhängig sind und ob sie erzeugend sind. Welche bilden eine Basis?

a)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$     b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$     d)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind 8 Punkte in  $\mathbb{R}^5$ ,  $P_i = (u_i, v_i, w_i, x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , wobei

$u_i$	1	1	1	1	1	1	0	0
$v_i$	1	1	1	-1	0	0	1	1
$w_i$	-1	1	0	0	1	-1	1	1
$x_i$	0	0	-1	1	-1	1	1	1
$y_i$	3	5	3	1	4	2	5	5

Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a, b, c, d$  der Funktion  $y = f(u, v, w, x) = a u + b v + c w + d x$ , so dass die Summe der Fehlerquadrate in  $y$ -Richtung

$$\sum_{i=1}^8 [f(u_i, v_i, w_i, x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

**Bitte wenden!**

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie  $\det A$ .

b) Für welche Werte der Parameter  $a, b, c, d$  ist die Matrix  $A$  singulär?

4. Sei  $x \in \mathbb{R}^2$ . Betrachten Sie die folgende Abbildung  $\mathcal{F}$  von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{F} : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}x_1 - x_2 \\ x_1 - \sqrt{3}x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

b) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{F}$  eine lineare Abbildung ist.

c) Durch welche Matrix  $A$  wird  $\mathcal{F}$  beschrieben?

d) Berechnen Sie  $\det A$ .

5. a) Gegeben sei  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(i) Berechnen Sie die Normen  $\|A\|_2$ ,  $\|A\|_\infty$  und  $\|A\|_1$ .

(ii) Angenommen  $A$  sei in MATLAB eingegeben, mit welchen MATLAB-Statements können Sie  $\|A\|_2$  berechnen? Geben Sie zwei verschiedene Lösungsarten an.

b) Bestimmen Sie die reelle Normalform der Matrix  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Gegeben sei das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= -2y_1(t) - 2y_2(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= -y_1(t) - 3y_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

b) Bestimmen Sie  $\alpha$ , so dass die Lösung von (1) zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{y}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ die Bedingung } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ erfüllt.}$$

**Viel Erfolg!**