Übungsserie 5

Abgabe der (z.T. mit dem TR) gelösten Aufgaben: **Freitag 9. Mai 2008** in der Vorlesung

1. Bezeichne Ω eine allgemeine gerade, quadratische **Pyramide**. (D.h. die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Bezeichnungen im Quadrat $ABCD$: a, b Mittelsenkrechten von AB bzw. AD, c = Diagonale durch A, C, d = Diagonale durch B, D)

   (a) Ermitteln Sie Symm(Ω), d.h. zählen Sie alle Rotationen (Drehwinkel und Drehachsen angeben) und alle Ebenenspiegelungen (Ebenen angeben) auf, die die Pyramide Ω mit sich selbst zur Deckung bringen. (Tipp: Analogie zur ebenen Figur $ABCD$ beachten!)

   (b) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf bzw. zur Vereinfachung nur den linken unteren Teil der Tafel bis und mit der Diagonalen.

2. **Abbildungstraining:** Figur 1 zeigt ein Netz von gleichseitigen Dreiecken mit den Gitterpunkten $A, \ldots, H$, mit den Gittergeraden $a, \ldots, h$ und mit dem Vektor $\vec{v}$.

   (a) Geben Sie eine Translation an, welche den Punkt B auf den Punkt H abbildet; eine Spiegelung, welche H auf D abbildet und eine Rotation, welche D auf C abbildet. (Verwenden Sie dazu nur die in Figur 1 vorhandenen, beschrifteten Objekte.)

   (b) Der Punkt A soll durch eine Rotation auf den Punkt E abgebildet werden. Geben Sie drei Lösungen mit drei verschiedenen Drehzentren (ausgewählt aus $A, \ldots, H$) an.

   (c) Sei $T = R_{E,120^\circ} \circ R_{D,120^\circ} \circ R_{B,120^\circ}$. Bestimmen Sie die Bilder $T(C)$, $T(E)$ von C bzw. E und mit Hilfe von Satz 2.9 (vgl. Skript zur Vorlesung) den „Typ“ der Kongruenztransformation T. Um was für eine besondere Transformation handelt es sich?

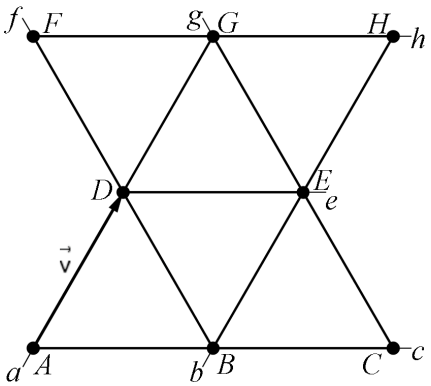
3. Von einem **Parallelogramm** $ABCD$ mit Seitenlängen $a = |AB|$, $b = |BC|$ werden 2 gleichseitige Dreiecke weggeschnitten (Figur 2). Es entsteht wiederum ein Parallelogramm.

   (a) In welchem Verhältnis müssen a, b zueinander stehen, dass das entstehende markierte Parallelogramm eine massstäbliche Verkleinerung des Parallelogramms $ABCD$ ist? (Setzen Sie zur Vereinfachung $b := 1$)

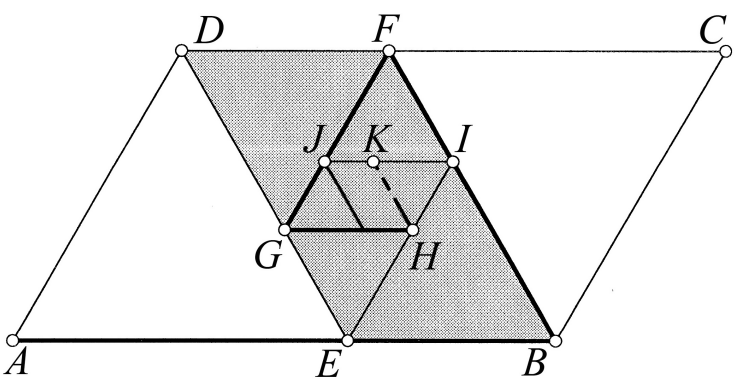
   Durch Fortsetzen des Verfahrens entsteht eine unendliche Folge von Parallelogrammen und, wenn in jedem Parallelogramm die passende Längsseite betrachtet wird, eine Art eckige '**Spirale**' $ABFGHK\ldots$ (Figur 2).

   (b) Beschreiben Sie die Lage des Zentrums der 'Spirale' und begründen Sie Ihre Antwort.

   (c) Berechnen Sie die Länge der 'Spirale' (ausgedrückt durch a) durch Ausnutzen der 'Selbstähnlichkeit'. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)



Figur 1 (Aufgabe 2)



Figur 2 (Aufgabe 3)

Übungsserie 5

4. Ein **Zaubertrick**: Denken Sie sich zwei beliebige positive reelle Zahlen, z. B. $a_1 = 2$ und $a_2 = 5$, und ermitteln Sie daraus die Zahlen $a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots$ gemäss dem *Bildungsgesetz* $a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$ (Jede Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden, d.h. für $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ also $7, 12, 19, 31, \ldots$). *Dann gilt stets*: Die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nähern sich für $n \to \infty$ immer mehr dem Verhältnis ϕ des Goldenen Schnitts an.

   Seien nun a_1, a_2 fest gewählt und a_n die mit dem Bildungsgesetz ermittelten Zahlen.

   (a) Zeigen Sie: $a_{n+1} = f_n \cdot a_2 + f_{n-1} \cdot a_1$ $(n \geq 2)$, wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist. (Anleitung: Setzen Sie $b_{n+1} := f_n \cdot a_2 + f_{n-1} \cdot a_1$ und zeigen Sie, dass $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$, und dass das rekursive Bildungsgesetz $b_{n+1} + b_n = \ldots = b_{n+2}$ erfüllt ist. Dann gilt $b_n = a_n$)

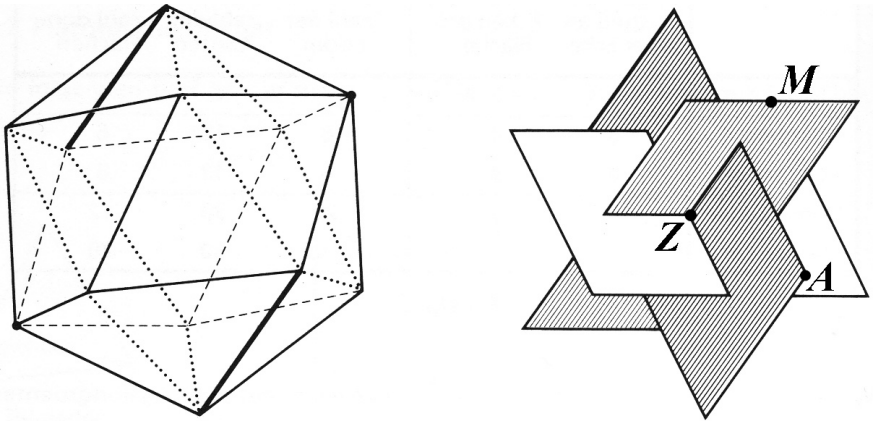
   (b) Zeigen Sie: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\phi\, a_2 + a_1}{a_2 + \frac{1}{\phi} a_1} = \ldots = \phi$ (…und damit ist der Zaubertrick bewiesen.)

5. **Abstrakte Gruppen**: Welche der folgenden Zahlenmengen bilden bezüglich der Zahlen-Multiplikation (Zeichen $\cdot$) eine Gruppe? Ist die Gruppe endlich oder unendlich, kommutativ oder nicht-kommutativ?

$\mathbb{T} = \{1, 2, 4, \ldots, 1024\}$	Menge der natürlichen Teiler der Zahl 1024
$\mathbb{E}$	Menge der Zahlen mit Endziffer 5
$\mathbb{K} = \{1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots\}$	Menge der Kubikzahlen
$\mathbb{D} = \{\ldots, 0.01, 0.1, 1, 10, 100, \ldots\}$	Menge der Zehnerordnungen

   Verifizieren Sie im Falle einer Gruppe alle Gruppenaxiome, anderenfalls genügt es, das 'erste', nicht erfüllte Gruppenaxiom anzugeben und anhand eines Zahlen-Beispiels zu verdeutlichen.

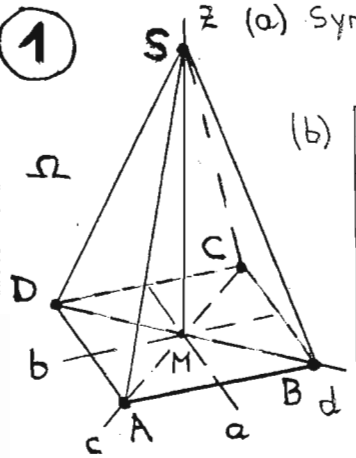
6. Die zwölf Ecken eines **regulären Ikosaeders** sind die zwölf Ecken dreier Goldener Rechtecke, die paarweise aufeinander senkrecht stehen (Figur 3). Berechnen Sie mithilfe dieses Resultats aus Aufgabe 2.5 (vgl. Skript zur Vorlesung) von einem regulären Ikosaeder mit der Kantenlänge a den exakten Ausdruck für
   (a) den Umkugelradius R (Tipp: $\phi^2 = \phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$, da $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$)
   (b) den Inkugelradius r. (Tipp: Drücken Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ZAM auf zwei Arten aus und setzen Sie die beiden Ausdrücke gleich.)



Figur 3 (Aufgabe 6)

1 (a) Symm(Ω): $\underline{I}, \underbrace{R_{90°}, R_{180°}, R_{270°}}, \underbrace{S_a, S_b, S_c, S_d}$

Rotationen um z-Achse / Ebenenspiegelungen an Ebenen durch a bzw. senkrecht-b,c,d.



z.B. $S_a \circ R_{90} = S_c$

$A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} A$

(b)

∘	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}	S_a	S_b	S_c	S_d
I	I							
R_{90}	R_{90}	R_{180}						
R_{180}	R_{180}	R_{270}	I					
R_{270}	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}				
S_a	S_a	S_c	S_b	S_d	I			
S_b	S_b	S_d	S_a	S_c	R_{180}	I		
S_c	S_c	S_b	S_d	S_a	R_{270}	R_{90}	I	
S_d	S_d	S_a	S_c	S_b	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

2 (a) $\underline{T_{2\vec{v}}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} : B \mapsto H$; $\underline{S_g} : H \mapsto D$; $\underline{R_{E,120°}} : D \mapsto C$

(b) $R_{D,120°} = R_{D,-240°}$, $R_{B,-120°} = R_{B,240°}$, $R_{F,60°} = R_{F,-300°}$

(c) $T: C \xrightarrow[R_{B,120°}]{} D \xrightarrow[R_{D,120°}]{} D \xrightarrow[R_{E,120°}]{} C$, T ist gleichsinnig (da Hintereinanderausführung von 3 Rotationen ↝ keine Spiegelung

$T: E \longmapsto A \longmapsto E \longmapsto E$

T hat 2 Fixpunkte ↝ keine Rotation mit $0 < \alpha < 360°$

Nach Satz 2.9 ist T die Identität: $T = I$

3 (a) Sei λ der Verkleinerungsfaktor: $\frac{|DE|}{|AB|} = \lambda = \frac{|EB|}{|BC|} \leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}$ (b ↔ a−b, a ↔ b)

$b^2 = a^2 - ab$, $a^2 - ab - b^2 = 0$

mit $b=1$: $a^2 - a - 1 = 0 \rightsquigarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ ↯}\right)$ $\frac{a}{b} = \underline{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \phi$ Verhältnis des gold. Schnitts

(b) Das Zentrum der Spirale ist der Diagonalenschnittpunkt Z von AC und BD.

Begründung: Die Diagonalen AC und BD des Ausgangsparallelogramms schneiden sich in Z. Z halbiert AC und BD und ist auch Schnittpunkt der Mittelparalleln. ↝ Die Diagonalen des nächstfolgenden Parallelogramms schneiden sich wiederum in Z! usw. Im Grenzfall fallen die Parallelogramme in einem Punkt zusammen, also in Z.

(c) Jedes nachfolgende Parallelogramm ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\phi}$

Länge: $L = |AB| + |BF| + |FG| + |GH| + \ldots = a + \frac{1}{\phi}|AB| + \frac{1}{\phi}|BF| + \frac{1}{\phi}|FG| + \ldots = a + \frac{1}{\phi}\underbrace{(|AB| + |BF| + |FG| + \ldots)}_{= L}$

$L = a + \frac{1}{\phi}L \leftrightarrow L - \frac{1}{\phi}L = a \rightsquigarrow L = \underline{\frac{a}{1-1/\phi}} = \frac{a \cdot \phi}{\phi - 1} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}a$

4 (a) $b_3 = \underbrace{f_2}_{n=2} a_2 + \underbrace{f_1}_{=1} a_1 = 1 \cdot a_2 + 1 \cdot a_1 = a_3$, $b_4 = \underbrace{f_3}_{n=3} a_2 + \underbrace{f_2}_{=2} a_1 = \underbrace{2a_2}_{a_2+a_2} + a_1 = a_2 + \underbrace{a_2 + a_1}_{a_3} = a_4$

$b_{n+1} + b_n = (f_n a_2 + f_{n-1} a_1) + (f_{n+1} a_2 + f_{n-2} a_1) = \underbrace{(f_n + f_{n-1})}_{f_{n+1}} a_2 + \underbrace{(f_{n-1} + f_{n-2})}_{f_n} a_1 = a_{n+2}$

Bildungsgesetz der Fibonacci-Zahlen: f_{n+1}, f_n

4 (b) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(f_n \cdot a_2 + f_{n-1} \cdot a_1)\frac{1}{f_{n-1}}}{(f_{n-1} \cdot a_2 + f_{n-2} \cdot a_1)\frac{1}{f_{n-1}}} = \frac{\frac{f_n}{f_{n-1}} a_2 + a_1}{a_2 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} a_1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{(\phi a_2 + a_1)}{(a_2 + \frac{1}{\phi} a_1)}$$

denn nach Satz 2.8: $\frac{f_n}{f_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} \phi$ und $\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = \left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\right)^{-1} \longrightarrow \phi^{-1}$

schliesslich: $$\frac{(\phi a_2 + a_1)}{(a_2 + \frac{1}{\phi} a_1)\cdot\phi} \frac{\phi}{} = \frac{(\phi a_2 + a_1)\cdot\phi}{a_2\phi + a_1} = \underline{\underline{\phi}}$$

---

5 $\mathbb{T}$ Keine Gruppe, denn $s, t \in \mathbb{T}$: $s \cdot t$ im allg. Kein Teiler von 1024 ↯ (G1)
z.B. $2 \cdot 1024 = 2048$

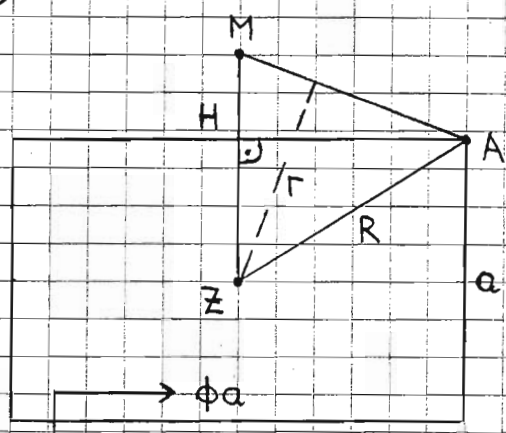
$\mathbb{E}$ Keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{E}$: $e \cdot t = t \cdot e = t \rightsquigarrow e = 1$ "Neutralelement" nicht Element $\mathbb{E}$ ↯ (G3)

$\mathbb{K}$ keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{K}$: $t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot t = 1$ (Neutralelement) $\rightsquigarrow t^{-1} = \frac{1}{t}$ ↯ (G4)
z.B. $t = 8$, $t^{-1} = \frac{1}{8}$, t^{-1} kein Element von $\mathbb{K}$

$\mathbb{D}$ unendl. kommutative Gruppe: (G1) Für $10^n, 10^m \in \mathbb{D}$ ist $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$ auch zehnerord.
(G2) $(10^n \cdot 10^m) \cdot 10^k = 10^{n+m+k} = 10^n (10^m \cdot 10^k)$ (G3) $1 \in \mathbb{D}$ Neutralelement mit $10^n \cdot 1 = 10^n$
(G4) zu $10^n \in \mathbb{D}$ ist $\frac{1}{10^n} = 10^{-n} \in \mathbb{D}$ mit $10^n \cdot 10^{-n} = 1$ (KG) $10^n \cdot 10^m = 10^{n+m} = 10^m \cdot 10^n$

---

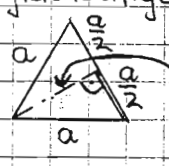
6 (a) $|HA| = \frac{1}{2} a \cdot \phi$ (halbe Länge eines Gold. Rechtecks, $|ZH| = \frac{a}{2}$ (halbe Breite eines...)



Goldenes Rechteck!

$$R = \sqrt{|HA|^2 + |ZH|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\phi\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\phi^2 + 1}$$
$$\overset{\text{Pythagoras}}{=} \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{2} + 1} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \underline{\underline{\frac{a}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}}$$
$\overset{}{=}$ Tipp

(b) MA ist Höhe in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a



$\sqrt{\underbrace{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}_{\frac{3}{4}a^2}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$$|MA| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$F_{\Delta ZAM} = \frac{1}{2}|MA| \cdot r = \frac{1}{2}|ZM| \cdot |HA|, \quad |ZM| = \frac{1}{2}a\phi \text{ halbe Länge eines...}$$

$$r = \frac{|ZM| \cdot |HA|}{|MA|} = \frac{\frac{1}{2}a\phi\,\frac{1}{2}a\phi}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}\phi^2 \overset{\text{Tipp (a)}}{=} \frac{a}{2\sqrt{3}}\frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{4\sqrt{3}}(\sqrt{5}+3)}} = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})}}$$