ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Name: ____________________ **Departement:** ____________________

Vorname: ____________________ **Legi-Nr.:** ____________________

Bitte lassen Sie die folgenden Felder frei, sie werden von den Korrektoren benutzt.

	1. Korr.	2. Korr.	Punkte	Bemerkungen
Aufgabe 1				
Aufgabe 2				
Aufgabe 3				
Aufgabe 4				
Aufgabe 5				
Total				

Vollständigkeit	
Punktzahl	

ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Wintersession WS13

Prüfung in Mathematik III

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

Wichtig

- Füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus!
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch!
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege! Begründen Sie ihre Lösungen!
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Zugelassene Hilfsmittel

- Schriftliche Unterlagen,
- **kein** Taschenrechner,
- **kein** Handy.

Viel Erfolg!

Nützliche Hinweise:

- Volumen der Kugel mit Radius r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$

1. a) Integrieren Sie die Funktion $f(x, y, z) := xyz$ über den Bereich

$$\mathcal{O} := \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \right\} ,$$

den im ersten Oktanten liegenden Teil der Einheitskugel.

(2 Punkte)

b) Überlegen Sie mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen, was man erhält, wenn man dieselbe Funktion über die ganze Einheitskugel

$$B_1(0) := \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \right\}$$

integriert.

(1 Punkt)

2. Zeichnen Sie den Graphen der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierten Funktion

$$g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

und entwickeln Sie diese in eine Fourierreihe.

(5 Punkte)

3. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$G(x, y, z) := \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $\mathcal{K} := \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geqslant 0\}$ (Sie können die Fläche selber orientieren).

(5 Punkte)

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst den Fluss durch

$$\mathcal{H} := \left\{(x, y, z) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ und } z = 0\right\}$$

und verwenden Sie anschliessend den Satz von Gauss.

4. Es sei Γ die Schnittellipse des Zylinders $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Ebene $\{(x, y, z)|z = 2y\}$.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $g(x, y, z)$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} g(x, y, z) \\ xz\mathrm{e}^{xyz} \\ xy\mathrm{e}^{xyz} \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Weges Γ gleich 0 ist.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$V(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Weges Γ (wählen Sie selbst eine Orientierung)

i. direkt.

ii. mit Hilfe des Satzes von Stokes.

(4 Punkte)

5. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung.

$$u_x(x,t) - \frac{u(x,t)}{x} - \frac{u_t(x,t)}{t} = 0$$

(4 Punkte)